引用格式:史晓洋,张然,柳丹,等. 一种铷原子钟频率稳定度估计方法研究[J]. 时间频率学报,2022,45(3):218-223.

一种铷原子钟频率稳定度估计方法研究

史晓洋, 张然, 柳丹, 阎栋梁

(北京无线电计量测试研究所,北京 100039)

摘要:频率稳定度是铷原子钟计量测试中一项重要的技术指标。在对铷原子钟频率稳定度进行长期测试,并对测试数据进行分析研究的基础上,提出了一种基于抗差最小二乘法+改进 Allan 方差的频率稳定度计算方法,通过稳定的频率漂移补偿 Allan 方差中频率漂移造成的误差,用以减小传统频率稳定度计算方法中的测试误差,提高测试结果的准确性。以计量实验室实测的时差数据对该算法进行验证,结果表明该算法有效地降低铷原子钟稳定频率漂移对其频率稳定度的影响,可应用于铷原子钟的频率稳定度测量中。

关键词:频率稳定度;抗差最小二乘法;Allan 方差;频率漂移
DOI:10. 13875/j. issn. 1674-0637. 2022-03-0218-06

Research on a frequency stability estimation method for rubidium atomic clock

SHI Xiao-yang, ZHANG Ran, LIU Dan, YAN Dong-liang

(Beijing Institute of Radio Metrology and Measurement, Beijing 100039, China)

Abstract: Frequency stability is the most important parameter in the measurement characteristics of rubidium atomic clock. Based on research of the frequency stability of rubidium atomic clock, a calculation method combining robust least square and improved Allan variance is proposed. The error caused by frequency drift in Allan variance is compensated by stable frequency drift, and it is used to reduce the test error in the traditional frequency stability calculation method and to improve the accuracy of the test results. The algorithm is verified by the measured time deviation data in the metrology laboratory, and the results show that the algorithm can effectively derease the influence of stable frequency drift and can be used for the frequency stability measurement of atomic clock.

Key words: frequency stability; robust least square method; Allan variance; frequency drift

0 引言

原子钟是基于原子跃迁频率稳定特性来获取精准时间频率信号的设备,具有较高时间频率精度,目前已广泛应用于导航、通信、定位、天文观测、精密仪器校准等领域,尤其在卫星导航定位系统中更是不可或缺的存在。其中,铷原子钟具有体积小、重量轻、功耗低、易于设计等优势,被广泛应用于地面导航定位系统中,其性能直接决定着导航和定位的精度[1-2]。

频率稳定度是衡量铷原子钟性能的关键指标之一,用于表示原子钟输出频率因噪声影响而引起随机波

收稿日期:2021-10-17;接受日期:2022-03-25

动的程度[3]。频率稳定度的表征主要采用时域分析方法，目前使用较多的是由美国 Allan 博士提出用经典方法估计值的数学期望作为平均频率随机起伏的方法，即 Allan 方差[4]。然而，在频率稳定度测试过程中，由于铷原子钟固有属性频率漂移特性的影响，致使输出频率出现单方向漂移，该频率漂移在一定观测时间内，比如一个月，可以认为是线性变化的[5-6]。考虑到 Allan 方差无法去除频率漂移的影响，而稳定频率漂移是可以预报的，提出了计算中扣除稳定频率漂移影响的改进 Allan 方差，通过频率驾驭的方式处理后提高铷原子钟的频率稳定度[7]。在频率漂移测量过程中，无法直接获取测量频率与标称频率的偏差，因此通常使用参考原子钟的频率作为标准来测量被测铷原子钟的实际输出频率，然后通过对时差数据进行最小二乘法线性拟合获取[8]。由于测量中会受到测试环境中温度、湿度、辐射、振动变化等影响，造成测试的频率出现波动，进而在线性频率漂移的基础上出现二次误差。由于最小二乘法无法处理上述误差产生的影响，一种将抗差原理引入最小二乘法得到的抗差最小二乘法由此产生，通过选择合适的权函数可以有效减小误差的影响。考虑到以上因素，本文提出了一种抗差最小二乘法＋改进 Allan 方差计算方法，用以减小传统稳定度计算方法中的测试误差，提高测试精度。

1　频率漂移特性与抗差最小二乘法

1.1　频率漂移特性

在铷原子钟长时间运行中，受器件本身老化等因素的影响，输出的频率常随运行时间单方向增大或者减小，因此把原子钟随运行时间单方向变化的速率称为频率漂移。频率的单方向变化非完全线性，但当观测时间限制在一定窗口内(如月)，可近似视为线性，因此可以通过最小二乘法来拟合直线的斜率[9]。

铷原子钟时差数据可以表示为

$$x(t)=x_0+y_0t+\frac{1}{2}Dt^2+\varepsilon_x(t),\tag{1}$$

式(1)中，x_0，y_0，D 分别表示为初始相位偏差、初始频率偏差和线性漂移；ε_x 为原子钟时间偏差的随机变化分量。

对式(1)进行求导，可以获得原子钟瞬时相对频率偏差 $y(t)$ 表达式：

$$y(t)=y_0+Dt+\varepsilon_y(t),\tag{2}$$

式(2)中，$\varepsilon_y(t)$ 为瞬时相对频率偏差的随机变化分量。

估计铷原子钟的频率漂移率就是获取上述 D 值。铷原子钟在长期运行过程中，受测试环境中温度、湿度、辐射、振动等影响，即使排除异常点，也会出现粗差数据，因此拟合方式采用抗差最小二乘法。

1.2　抗差最小二乘法

抗差估计是统计学中常用的处理粗差的方法，抗差最小二乘法是将抗差估计原理和最小二乘法特性相融合。抗差最小二乘法抗差化的关键是建立合适的权函数，IGGIII(Institute of Geodesy & Geophysics, Chinese Academy of Sciences III)法是目前常用的抗差估计方法中相对稳定的一种，因此本文使用 IGGIII 法建立权函数。

设有一组相互独立的观测值$\{l_i, i=1,2,3,\cdots,n\}$，$\boldsymbol{\Delta}$ 为观测误差矢量值，其观测方程如式(3)所示[10]：

$$\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}。\tag{3}$$

则误差方程为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{L}。\tag{4}$$

利用最小二乘法计算参数 $\boldsymbol{X}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L},\tag{5}$$

式(3)～(5)中，$\boldsymbol{L}$ 为 $n\times1$ 阶观测矩阵，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 阶已知矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为 $m\times1$ 阶未知参数矢量，$\boldsymbol{V}$ 为残差矢量，$\hat{\boldsymbol{X}}$ 为未知参数估计矢量，$\boldsymbol{P}$ 为观测值的权矩阵。

抗差最小二乘法估计属于极大似然估计(M 估计)范畴,准则函数定义为

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(v_i) = \min, \tag{6}$$

式(6)中,$\rho(\cdot)$ 是适当选择的凸函数,v_i 指第 i 观测值的残差。

若设 $\phi(v_i)$ 为单调且正半轴非降函数,且 $\phi(v_i) = \rho'(v_i)$,则可得

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(v_i) a_i = 0。 \tag{7}$$

若令 $\omega_i = \dfrac{\phi(v_i)}{v_i}$,$\bar{p}_i = p_i\omega_i$,则抗差最小二乘法估计值 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 为

$$\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{L}。 \tag{8}$$

式(7)和(8)中,a_i 为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列向量,$\bar{p}_i$ 为等价权 $\bar{P}$ 第 i 行向量。

通过对比式(5)和(8),最小二乘法和抗差最小二乘法解的型式基本一致,但权函数对应的内涵不同,最小二乘法的权是先验且等价的,而抗差最小二乘法的权是残差的函数,表示时差值的有效性。

本文权函数采用IGGIII权函数,如式(9)所示。IGGIII权函数将权值分为正常段、可疑段和淘汰段,对于正常段采用原始权,可疑段进行降权,淘汰段取零权,因此通过合适的参数选取可以有效去除粗差对计算结果的影响。

$$\bar{p}_i = \begin{cases} p_i & |u_i| < k_0 \\ p_i\omega_i & k_0 \leqslant |u_i| < k_1, \\ 0 & |u_i| > k_1 \end{cases} \tag{9}$$

$$\omega_i = \frac{k_0}{u_i}\left(\frac{k_1 - |u_i|}{k_1 - k_0}\right)^2, u_i = v_i/\sigma_0。 \tag{10}$$

式(9)和(10)中,p_i 为权矩阵 $\boldsymbol{P}$ 第 i 行向量,σ_0 为方差因子;k_0 取值通常为 1.0 ~ 1.5,k_1 取值通常为 3.0 ~ 6.0。

2 改进 Allan 方差

Allan方差又叫双样方差,是目前国际普遍计算时域频率稳定度的方法。Allan方差通常用如下表达式进行估计

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(M-1)}\sum_{i=1}^{M-1}[y_{i+1} - y_i]^2, \tag{11}$$

式(11)中,τ 为采样时间;y 为 τ 时间内相对频率测量值;M 为连续测量次数。

在实际测量中,很难直接给出 τ 时间内的频率偏差,通常使用精度较高的频标作为被测铷原子钟的测试参考,通过计算两个频标相位差的方式,给出被测铷原子钟的 Allan 方差,具体的表达式为

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(M-1)\tau^2}\sum_{i=1}^{M-1}[x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i]^2。 \tag{12}$$

在实际计算过程中,由于频率漂移的影响,致使时差曲线随观测时间增加而逐渐呈近似二次函数趋势变化,从而导致 Allan 方差计算结果出现偏差,因此运算过程中需要扣除频率漂移。

对式中计算结果进行改进,扣除 τ 时间内频率漂移引起的偏差 $D\tau$,可得到改进后的关系式[11]:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(M-1)}\sum_{i=1}^{M-1}[y_{i+1} - y_i - D\tau]^2, \tag{13}$$

若测试数据为时差数据,由于频率漂移造成时差数据呈二次函数趋势变化,因此 τ 时间内引入的时差数据误差近似为

$$x_{i+1} - x_i = y_i\tau + \frac{1}{2}D\tau^2。 \tag{14}$$

同理:$x_{i+2} - x_{i+1} = (y_{i+1} + k\tau)\tau + \dfrac{1}{2}D\tau^2$,其中 k 为$\dfrac{1}{2}D$,可得:

$$\sigma_y^2(\tau)=\frac{1}{2(M-1)\tau^2}\sum_{i=1}^{M-1}\left[x_{i+2}-2x_{i+1}+x_i-k\tau^2\right]^2。\tag{15}$$

3　算法实例分析

本次实验基于计量实验室原子钟测试环境,对铷原子钟进行时差数据采样,数据采样时间间隔为 1 h,观测总时间约为 19 d,共计 448 个采样点。在实际测试中普遍使用相对频率偏差(即单位采样时间内的时差数据变化量)表征测试结果,将时差数据转化为相对频率偏差后如图 1 所示。

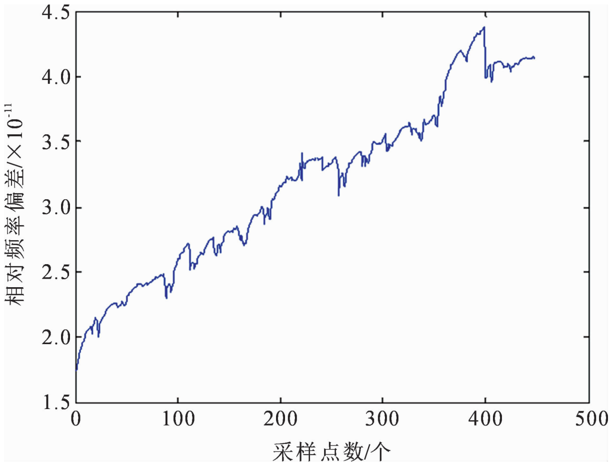

图 1　相对频率偏差数据图

图 2 为最小二乘法和抗差最小二乘法的比对示意图,其中抗差最小二乘法权函数中 k_0 和 k_1 分别选取为 1.2 和 3.5。可以看出,在相对频率偏差数据线性特性较好时,最小二乘法和抗差最小二乘法斜率相差不大,但是由于抗差最小二乘法考虑了粗差的影响,可以有效减少因环境变化出现的测量偏差点对线性拟合的影响,频率漂移结果依旧会存在一定差距,且抗差最小二乘法具有更高的精度。

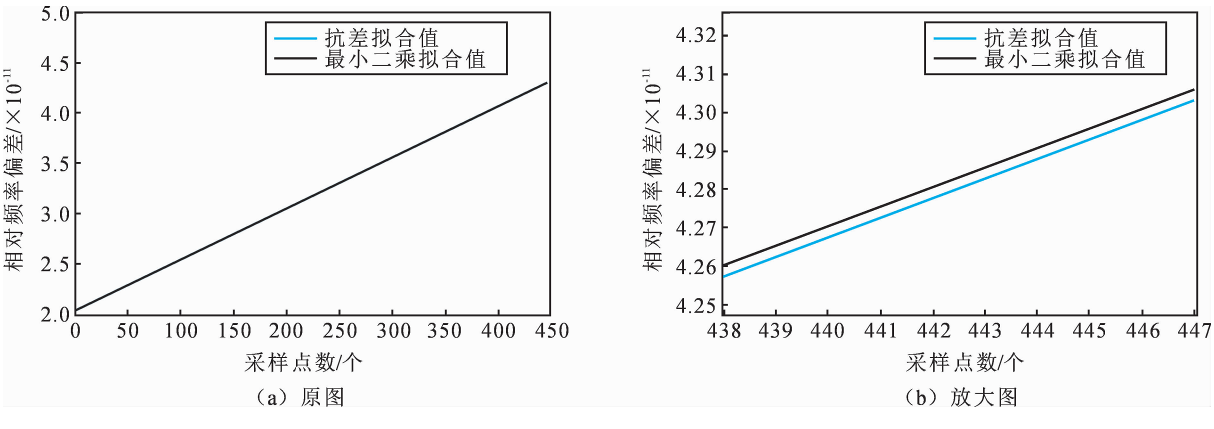

图 2　抗差最小二乘法、最小二乘法拟合斜率和放大图

图 3 至图 5 分别是 Allan 方差、最小二乘法+改进 Allan 方差、抗差最小二乘法+改进 Allan 方差的频率稳定度结果。图 6 为三种方案的频率稳定度计算结果对比图,可以看出在不扣除频率漂移影响时,频率稳定度计算结果会有比较大的偏差,数据计算结果比较差。同时,通过可扣除最小二乘法和抗差最小二乘法获得频率漂移的结果可以看出,频率漂移对于频率稳定度的测量有很大的影响,且随着时间的粒度增加而逐渐增大。

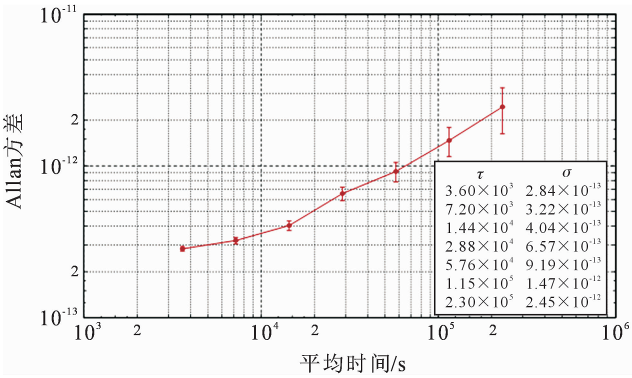

图 3 Allan 方差改进前的频率稳定度计算结果

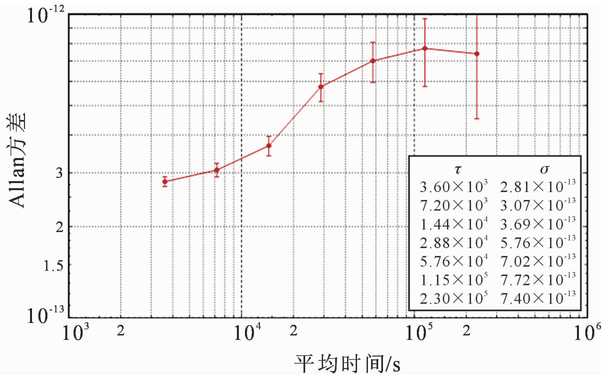

图 4 Allan 方差改进后(最小二乘法拟合)的频率稳定度计算结果

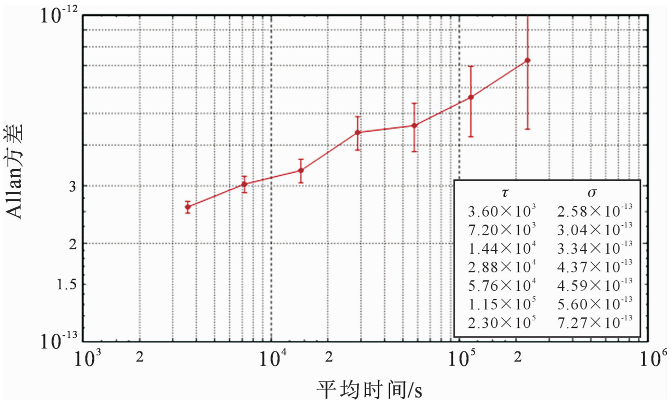

图 5 Allan 方差改进后(抗差最小二乘法拟合)的频率稳定度计算结果

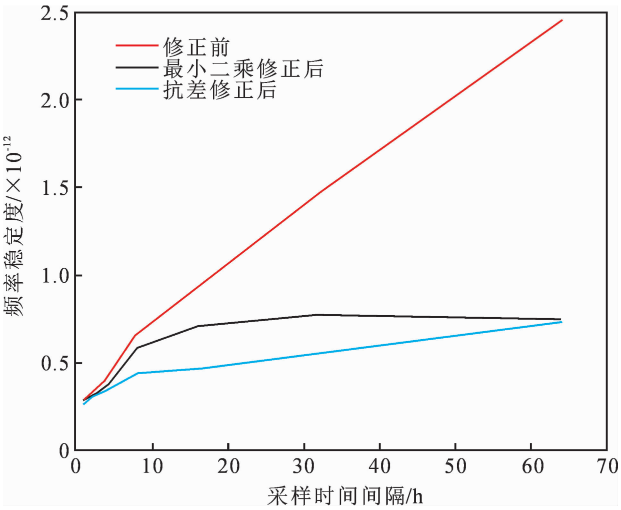

图 6 Allan 方差修正前后频率稳定度计算结果对比图

表 1 为是 Allan 方差改进前、最小二乘法+改进 Allan 方差、抗差最小二乘法+改进 Allan 方差修正后的频率稳定度计算结果对比。可以更直观地看出,抗差最小二乘法+改进 Allan 方差修正后的数据更加有效地扣除了频率漂移对于频率稳定度的系统误差,所得稳定度数据更加准确。

表 1　改进前后频率稳定度计算结果对比

采样时间/h	改进前	最小二乘法＋改进 Allan 方差修正后	抗差最小二乘法＋改进 Allan 方差修正后
1	2.84×10^{-13}	2.81×10^{-13}	2.58×10^{-13}
2	3.22×10^{-13}	3.07×10^{-13}	3.04×10^{-13}
4	4.04×10^{-13}	3.69×10^{-13}	3.34×10^{-13}
8	6.57×10^{-13}	5.76×10^{-13}	4.37×10^{-13}
16	9.19×10^{-13}	7.02×10^{-13}	4.59×10^{-13}
32	1.47×10^{-12}	7.72×10^{-13}	5.60×10^{-13}
64	2.45×10^{-12}	7.40×10^{-13}	7.27×10^{-13}

4　结语

本文提出了一种用于计算铷原子钟频率稳定度的估计方法,通过在算法中扣除稳定频率漂移的方式提高测试结果的准确性。由于稳定的频漂可以通过线性拟合进行计算,可以在计算 Allan 方差时扣除稳定频漂的影响。考虑到频率漂移结果容易受到测试环境变化的影响,引入抗差最小二乘法,通过选取参数,扣除测量偏差点的影响。通过计量实验室实测的时差数据对该算法进行验证,并对改进前后频率稳定度计算结果对比,得出抗差最小二乘法＋改进 Allan 方差的估计算法明显地降低了频率漂移对于铷原子钟频率稳定度的影响,可应用于铷原子钟的频率稳定度测量中。

参考文献:

[1]　孔维,李保东,陶春燕,等.卫星导航系统监测站铷原子钟频率校准方法分析[J].导航定位学报,2014(1):67-71.

[2]　HUTSELL S T,RELD W G,CRUM J D,et al. Operational use of the Hadamard variance in GPS[C]//Proceedings of the 28th Annual Precise Time and Time Interval Systems and Applications Meeting,1996:201-214.

[3]　陶娟娟,张龙青.频率稳定性时域频域表征方法的分析研究[J].科技传播,2016(18):258-259.

[4]　蔺玉亭,韩春好,杜燕,等.原子钟频率稳定度分析方法及频率漂移影响分析[J].装备指挥技术学院学报,2009(4):74-77.

[5]　韩海林,孙杰.铷原子频率标准频率稳定度测量方法及不确定度评定[J].电子世界,2015(15):117-118.

[6]　郭海荣,杨生,何海波.导航卫星原子钟频率漂移特性分析[J].全球定位系统,2007(6):5-10.

[7]　郭海荣.导航卫星原子钟时频特性分析理论与方法研究[D].郑州:解放军信息工程大学,2006.

[8]　NIU X J,CHEN Q J,ZHANG Q,et al. Using Allan variance to analyze the error characteristics of GNSS positioning[J]. GPS Solutions,2014,117(2):231-242.

[9]　马凤鸣.时间频率计量[M].北京:中国计量出版社,2009.

[10]　YANG Y,CHENG M K,SHUM C K,et al. Robust estimation of systematic errors of satellite laser range[J]. Journal of Geodesy,1999,73(7):345-349.

[11]　张然,杨帆.一种针对氢原子频标长稳测量的修正 Allan 方差算法研究[J].宇航计测技术,2019,39(S1):23-28.