

引用格式:范思晨,雷鹏越,赵义发,等.6.98 K 低温蓝宝石振荡器研制[J].时间频率学报,2025,48(3):167-173.

6.98 K 低温蓝宝石振荡器研制

范思晨^{1,2}, 雷鹏越^{1,2,3}, 赵义发^{1,2,3}, 王心亮^{1,2}, 阮军^{1,2,†}

1.中国科学院 国家授时中心,西安 710600;
2.时间基准及应用重点实验室(中国科学院),西安 710600;
3.中国科学院大学,北京 100049

摘要:蓝宝石晶体在液氦环境下介质损耗极低,回音壁模式的谐振腔品质因数值达到 1×10^9 级,由此制成的振荡器具有超低相位噪声和较高中短期频率稳定性等特性。设计并研制了工作在 WGH_{15,0,0} 的蓝宝石谐振腔,采用 GM 制冷机为其提供低温环境,温度峰峰值波动优于 $\pm 5 \text{ mK}$,振动优于 $\pm 1 \mu\text{m}$ 。蓝宝石谐振腔工作在频率-温度拐点温度 6.98 K 处,无载品质因数为 1.8×10^8 。利用谐振腔和放大器构成的振荡环路在满足 Barkhausen 条件下实现了 9.98 GHz 的微波信号输出,同时利用 Pound 锁频的方法把振荡频率锁定在蓝宝石谐振腔的谐振频率上,并且对振荡环路进行功率稳定控制,从而获得高频率稳定性、低相位噪声的微波信号,相位噪声为 -88 dBc/Hz@1 Hz ,秒级频率稳定性为 1.2×10^{-13} 。

关键词:蓝宝石谐振腔;品质因数;高频率稳定性;低相位噪声

DOI:10.13875/j.issn.1674-0637.2025-03-0167-07

Development of 6.98 K cryogenic sapphire oscillator

FAN Si-chen^{1,2}, LEI Peng-yue^{1,2,3}, ZHAO Yi-fa^{1,2,3}, WANG Xin-liang^{1,2}, RUAN Jun^{1,2,†}

1. National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;
2. Key Laboratory of Time Reference and Applications (Chinese Academy of Sciences), Xi'an 710600, China;
3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract: Sapphire crystal has very low dielectric loss in liquid helium, and the quality factor (Q) value can reach 1×10^9 working at whispering gallery modes. The oscillator made by this method has ultra-low phase noise and high short and medium term frequency stability. A sapphire resonator working at WGH_{15,0,0} is designed and developed. A GM cryocooler is used to provide a cryogenic environment for the resonator, and the temperature peak-to-peak fluctuation is better than $\pm 5 \text{ mK}$, and the vibration is better than $\pm 1 \mu\text{m}$. The sapphire resonator works at the frequency-temperature inflection point temperature 6.98 K, and the Q_0 value is 1.8×10^8 . The oscillator loop composed of the resonator and the amplifier can generate microwave signal under the Barkhausen condition, and the microwave signal output at 9.98 GHz is realized. At the same time, Pound frequency locking method is used to lock the oscillator frequency to the sapphire resonator, and the power stability control is carried out to obtain the microwave signal with high frequency stability and low phase noise. The phase noise is -88 dBc/Hz@1 Hz . The second frequency stability of the low temperature sapphire oscillator is 1.2×10^{-13} at second.

收稿日期:2024-12-31;接受日期:2025-01-18;†:ruanjun@ntsc.ac.cn

基金项目:中国科学院重大科技基础设施维修改造(DSS-WXGZ-2020-0005);中国科学院科学仪器研制(YJKYYQ20200020);陕西省重点研发计划(2023-YBGY-402)

Keywords: sapphire resonator; quality factor; high frequency stability; low phase noise

蓝宝石晶体在低温环境下介质损耗极低^[1],当其工作在高阶回音壁模式下时,Q值达到 1×10^9 量级,基于此构建的振荡器在积分时间1~10 000 s内频率稳定度均优于 3×10^{-15} ,在原子喷泉钟^[2-6]、深空探测^[7-8]、超视距雷达^[9-10]、量子计算和基础物理理论检验等领域有重要应用。西澳大学采用液氦杜瓦制冷方式使蓝宝石谐振腔维持在6 K附近,应用于引力波探测与低噪声振荡器^[11]等方面。法国femtost研究所设计了“开腔”模型的无液氦制冷方式的低温蓝宝石振荡器,用于实验室参考信号与仪器校准测量^[12]。

本文介绍了一种6.98 K温度下高Q值蓝宝石谐振腔,同时,搭建了高频率稳定度的微波振荡环路,论述了其结构、工作原理及性能。最后,对低温蓝宝石振荡器的性能进行测试,并对其结果进行分析。

1 低温蓝宝石振荡器的工作原理和结构设计

图1是低温蓝宝石振荡器系统框图,主要由低温蓝宝石谐振腔、振荡电路和监控系统三部分组成。系统的核心部件是低温蓝宝石谐振腔,工作在高阶回音壁模式下的高纯度蓝宝石谐振腔,谐振腔与GM制冷机的二级冷盘连接,通过液氦传导冷量,使其温度维持在4~15 K。低温同轴电缆将蓝宝石谐振腔连接到室温环境中的基本振荡电路。振荡电路是基于Pound-Galani构型的振荡器,整体环路包括:基本振荡环路、Pound锁频环路和功率伺服控制环路。谐振器和放大器构成的振荡环路在满足Barkhausen条件下产生微波信号^[13],利用Pound锁频方法把振荡器频率锁定在蓝宝石谐振器的共振频率上,并对注入谐振腔的功率进行稳定,获得高频率稳定度和低相位噪声的微波信号。同时,监控系统对谐振腔温度、真空度进行采集,并对振荡器输出信号的频率、功率采集分析。

2 装置介绍及运行过程

2.1 低温蓝宝石谐振腔

低温蓝宝石振荡器的核心是一个圆柱形的高纯度蓝宝石谐振腔。当谐振腔的温度从室温冷却至液氦温度时,其介质损耗正切角从 1×10^{-5} 量级下降至 1×10^{-9} 量级^[14],Q值将提高4个量级。

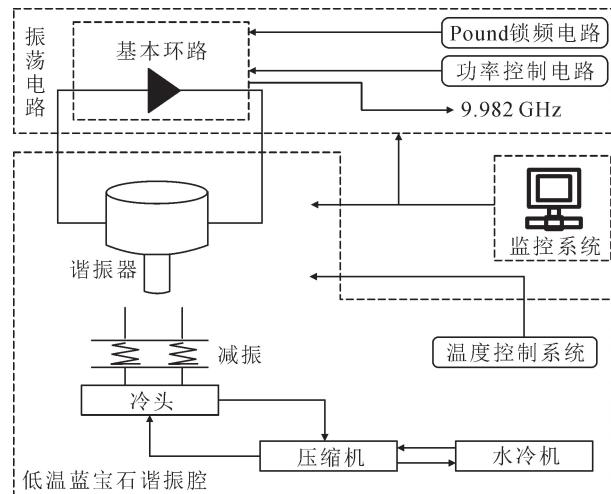


图1 低温蓝宝石振荡器整体结构

2.1.1 低温装置

为维持高Q值,蓝宝石微波腔需连续工作在低温环境中。设计并研制了无液氦制冷方式液氦导热模式的制冷装置,为蓝宝石谐振腔提供低温环境。首先利用GM制冷机将氦气进行液化,并将其储存在制冷机冷头换热器下方的液氦腔内,冷量通过二级导冷法兰等传递至蓝宝石谐振腔。同时,在谐振腔外壁安装了高精度温度传感器、加热棒,最终实现蓝宝石谐振腔温度稳定;气体的压缩/膨胀循环会导致腔室和气体管道产生机械振动,从而影响振荡器的频率稳定性,采用液压波纹管减弱制冷机的振动,通过橡胶空气减震器将制冷机与真空罩进行隔离,使用加速度传感器测量竖直方向的机械振动,其幅度小于±1 μm,如图2所示。

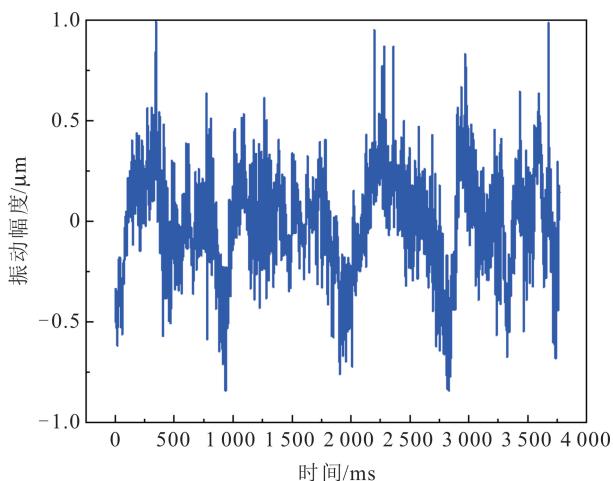


图2 谐振腔处的振动水平

机械振动引起的振荡器相对频率稳定度可以表示为

$$\left| \frac{\Delta f}{f_0} \right| = 4\pi^2 f_{\text{mod}}^2 Z_0 \sin(2\pi f_{\text{mod}} t) S_\gamma. \quad (1)$$

式(1)中, $|\Delta f/f_0|$ 为由于机械振动引起的振荡器相对频率稳定度, $f_{\text{mod}} \approx 1 \text{ Hz}$ 为振动周期, $Z_0 = 1 \mu\text{m}$ 为振动幅度, $S_\gamma = 3.2 \times 10^{-10}/\text{g}$ 为加速度对共振频率的敏感度, t 为时间。因此根据式(1)可得, $|\Delta f/f_0| = 1.3 \times 10^{-15}$ 。

2.1.2 蓝宝石谐振腔参数

1) 蓝宝石谐振腔频率-温度拐点

当蓝宝石温度下降时, 蓝宝石介电常数变小, 谐振频率变大, 而内部顺磁性杂质 Ti^{3+} 、 Mo^{3+} 等少量的存在受居里定律磁化率的作用, 使得谐振频率变小, 从而产生频率-温度拐点。该转折点取决于杂质离子的类型和浓度, 对于高纯度的蓝宝石晶体, 其拐点通常为 5~9 K。通过改变蓝宝石谐振腔的温度, 测量了不同温度下的谐振频率, 如图 3 所示。

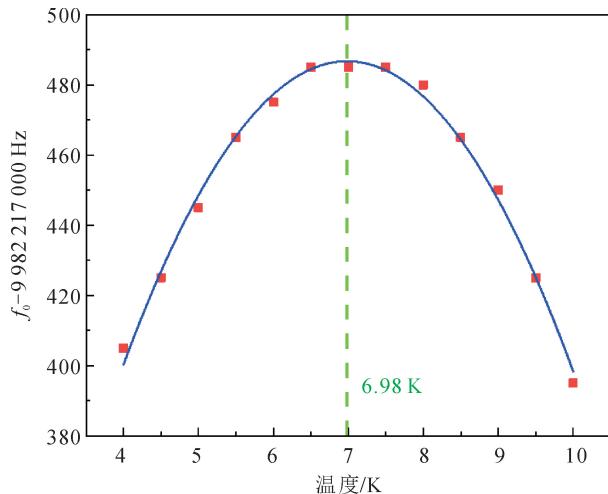


图 3 WGH_{15,0,0} 谐振频率与温度的关系

在 T_0 温度附近时, 频率与温度的关系呈现抛物线轨迹, 采用二阶多项式对频率和温度的关系进行拟合:

$$f(T) = aT^2 + bT + c. \quad (2)$$

通过拟合可得

$$\begin{cases} a = -9.71029 \\ b = 135.61439 \\ c = 13.18182 \end{cases} \quad (3)$$

可得该蓝宝石谐振腔的频率-温度拐点为 $T_0 = -b/2a = 6.98 \text{ K}$ 。

在 T_0 温度附近, 谐振腔的谐振频率对温度变化一阶函数不敏感。通过对温度 T 求导, 可得频率对温度 T_0 温度附近的残余灵敏度为

$$\frac{1}{\Delta T} \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2a}{f_0} (T - T_0). \quad (4)$$

因此可得到曲率 $K_A = 2a/f_0 = 1.946 \times 10^{-9} \text{ K}^{-2}$ 。

为了维持 6.98 K 的温度环境, 制冷机首先把温度冷却到液氦温度 4 K, 通过加热棒、传感器形成温度控制环路, 将谐振腔的温度维持在频率-温度拐点(6.98 K)偏移 5 mK 范围内, 如图 4 所示。

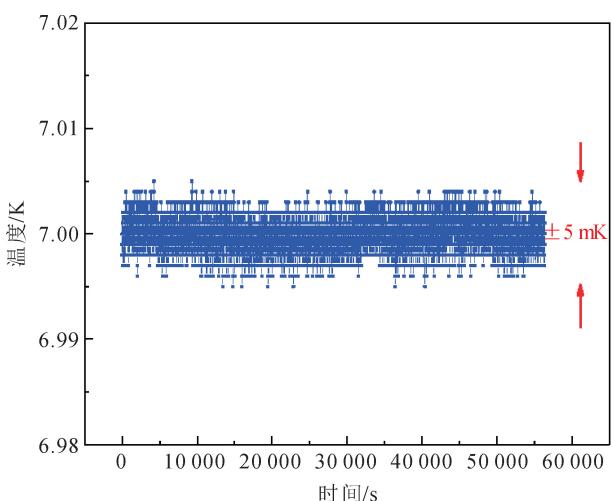


图 4 谐振腔处的温度波动

低温环境温度控制系统的整体噪声导致的温度波动为 $\Delta T = \pm 5 \text{ mK}$, 当在频率-温度拐点偏离 4 mK 时, 因此根据式(4)可得温度波动对频率稳定度的极限为 3.9×10^{-14} 。将蓝宝石谐振腔的温度控制在该温度下, 可以降低谐振频率随温度波动的影响。

2) 蓝宝石谐振腔耦合参数

基于径向-轴向模式匹配法, 理论分析了谐振频率与谐振体几何尺寸的关系; 基于有限元分析仿真了蓝宝石圆柱体内场分布情况; 基于近场探测的方法, 采用磁环/探针耦合的方式激发蓝宝石谐振体内的回音壁电磁场, 测量了谐振体表面的 S 参数, 由此确定了谐振体内的回音壁模式参数^[15]。通过二分法调整磁环距蓝宝石腔体的距离, 使得低温蓝宝石谐振腔的入射耦合系数应接近于 1, 出射耦合系数接近于 0, 这样保证了蓝宝石谐振腔作为鉴频器具有最高的鉴频灵敏度, 又降低了对幅度调制噪声的敏感度。

将温度稳定在 6.98 K, 对蓝宝石谐振腔进行扫频测量腔模式。图 5(a)是高阶基模 WGH_{15,0,0} 的透

射系数 S_{21} 。蓝宝石腔体是非理想的圆柱体,原本简并的两种极化模式中心频移发生偏移,出现双模态,频率差为 18 kHz,线宽为百 Hz 量级。当温度

稳定在 6.98 K 下时,蓝宝石谐振体正交极化模式的 S 参数如图 5(b) 所示,测量带宽为 5 kHz。蓝宝石谐振腔的特性参数如表 1 所示。

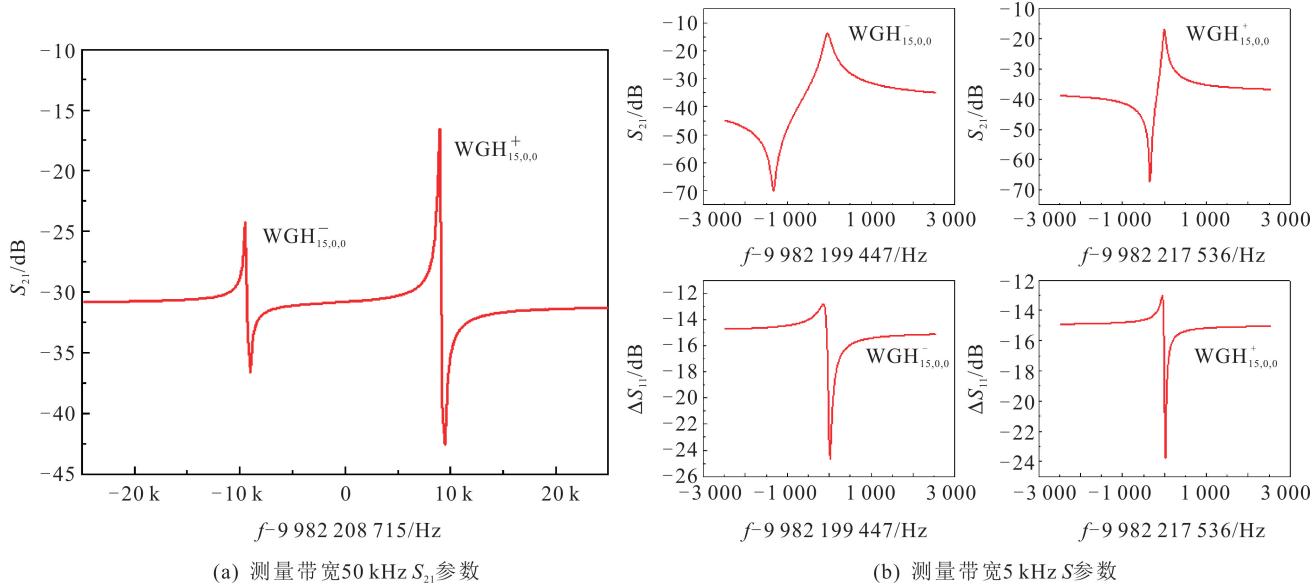


图 5 6.98 K 时 $\text{WGH}_{15,0,0}$ 模式 S 参数

表 1 6.98 K 蓝宝石谐振腔参数

模式	谐振频率 / Hz	S_{21} / dB	ΔS_{11} / dB	Q_0	β_1	β_2
$\text{WGH}_{15,0,0}^-$	9 982 199 410	-13.85	-5.53	1.45×10^8	0.55	0.77
$\text{WGH}_{15,0,0}^+$	9 982 217 540	-17.19	-2.42	2.95×10^8	0.22	0.56

2.2 振荡电路设计

利用 $\text{WGH}_{15,0,0}^-$ 模式的蓝宝石谐振器构成振荡器,如图 6 所示,并且通过两个伺服环路来控制信号的相位和功率波动,来提高信号的频率稳定和相位噪声性能。基本振荡环路包括低温蓝宝石谐振腔、低相位噪声放大器、电调移相器、腔体滤波器和隔离器。谐振器用于基本振荡回路的传输模

式,在反射模式下作用于经典 Pound 电路的鉴频器,插入损耗为 -15 dB。低噪声微波放大器提供 54 dB 的增益,补偿环路损耗,使得注入到谐振腔的微波功率约为 1 mW。通过调节移相器使得环路起振并且使振荡信号功率最大。腔体滤波器用于选择 $\text{WGH}_{15,0,0}^-$ 模式,中心频率为 9.889 GHz,带宽为 55 MHz。

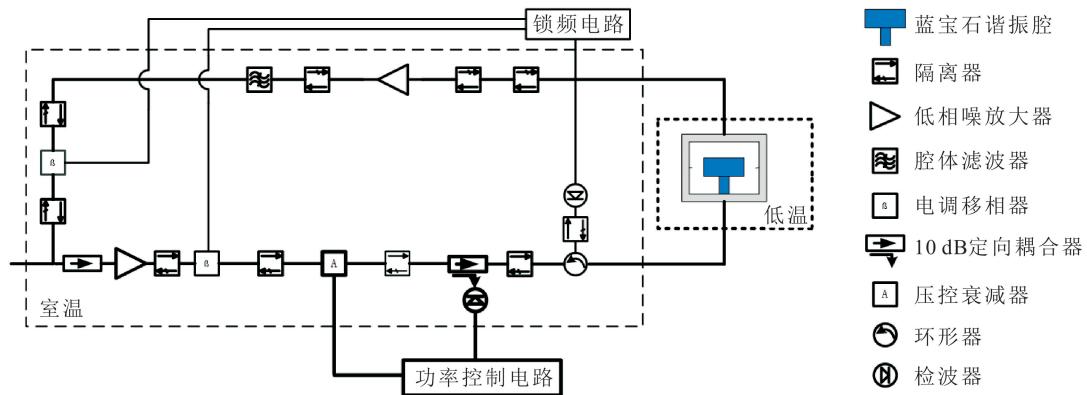


图 6 低温蓝宝石振荡器整体电路设计

在基本振荡环路的基础上,为了进一步提高频率源的频率稳定度,采用 Pound 电路原理,增加相位控制环路,使微波环路的相位延迟发生改变,使得振荡信号的相位更加稳定。同时,功率伺服控制电路使得注入谐振腔的功率稳定,提高了振荡器频率的长期稳定度。

2.2.1 Pound 锁频电路

Pound 锁频电路将振荡器的频率锁定在谐振腔

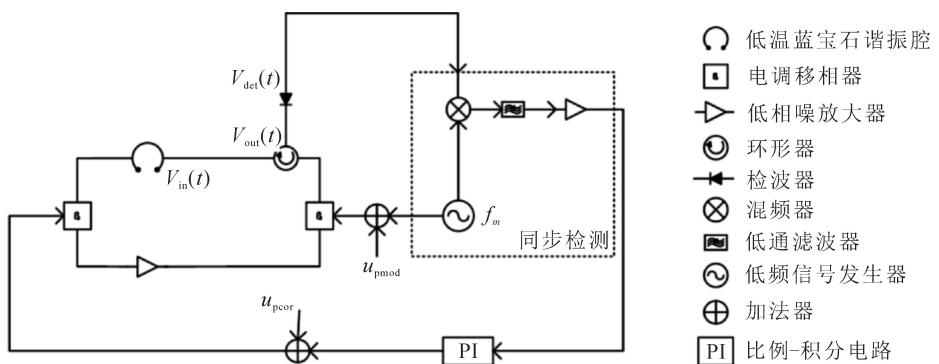


图 7 Pound 锁频电路原理

Pound 锁频对环路稳定性的上限为

$$\sigma^{\text{Pound}}(\tau) = \frac{e_n}{\sqrt{2} D f_0} \tau^{-1/2}。 \quad (5)$$

该电路的灵敏度为 $D = 1.74 \times 10^{-3}$ V/Hz, $e_n \approx 10 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ 为检波器的噪声, f_0 为振荡器频率, τ 为取样时间。根据式(5)计算可得 $\sigma^{\text{Pound}}(\tau) \approx 4.07 \times 10^{-16} \tau^{-1/2}$ 。因此 Pound 锁频电路引起的秒级稳定性极限为 4.1×10^{-16} 。

2.2.2 功率伺服控制电路

热效应和压力辐射使得注入谐振腔的微波功率发生变化,导致振荡频率发生改变。功率伺服控制电路使得注入谐振腔的功率稳定,避免长期的温度波动。耦合器被放置在尽可能靠近谐振器输入的位置,二极管将自由运转的低温蓝宝石振荡器的环路微波功率抖动转化为电压抖动,与高稳定性的基准电压进行比较,产生的误差信号在积分后加在压控衰减器的控制端上稳定环路中的信号功率,如图 8 所示。

功率伺服控制电路对环路稳定性影响的上限为

$$\sigma^{\text{power}} = 2\sqrt{2\ln 2}\sqrt{\alpha} \frac{P_{\text{inc}}}{f_0} \left| \frac{\partial f}{\partial P} \right|。 \quad (6)$$

式(6)中, $\alpha \approx 10^{-9.6}$ 为二极管的闪烁噪声, $P_{\text{inc}} \approx 0.2 \text{ mW}$ 为散射到谐振腔的功率, f_0 为振荡器频

带宽非常窄的谐振频率上,如图 7 所示,其包括检波器、锁相放大器、积分器、压控移相器。54.48 kHz 的调制信号作用于压控移相器 1 进行相位调制,其带宽为 10 Hz。二极管将低温蓝宝石谐振器的反射信号功率值转化为电压值,锁相放大器对其进行解调,得到误差信号,作用于基本振荡电路中的电调移相器,实现频率稳定。

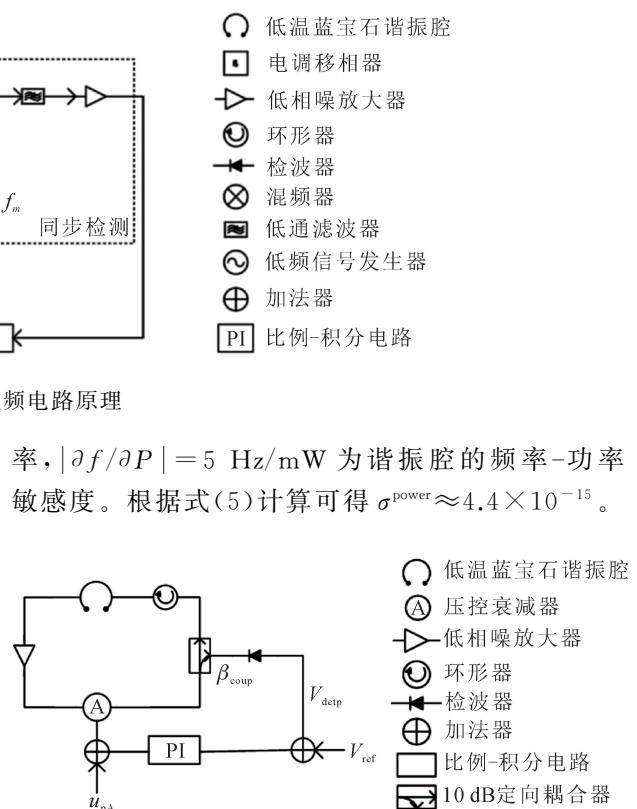


图 8 功率稳定控制电路原理图

3 性能分析

6.98 K 低温蓝宝石振荡器实物如图 9 所示。将低温蓝宝石振荡器的输出信号 9.982 GHz 通过 100 分频后和超稳晶振 HSO14 的 10 MHz 进行相互比对,使用 VCH323 相位比对分析仪进行比对。

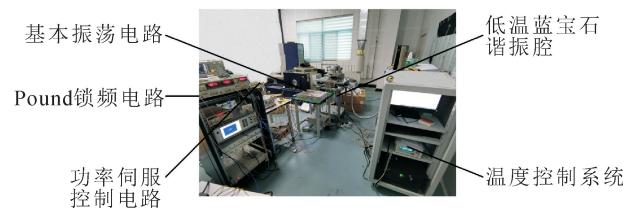


图 9 6.98 K 低温蓝宝石振荡器

图 10 中相位噪声均为 99.82 MHz 信号, 绿线表示自由运转振荡器, 蓝线表示带有锁频电路振荡器, 红线表示带有锁频电路和功率控制电路振荡器, 频偏 $10 < f < 100$ Hz 的杂散是由于压缩机循环频率造成的, 55 kHz 附近的杂散来自低温蓝宝石振荡器 Pound 锁频控制系统的调制频率。此外, 还存在 50 Hz 交流电及其谐波。

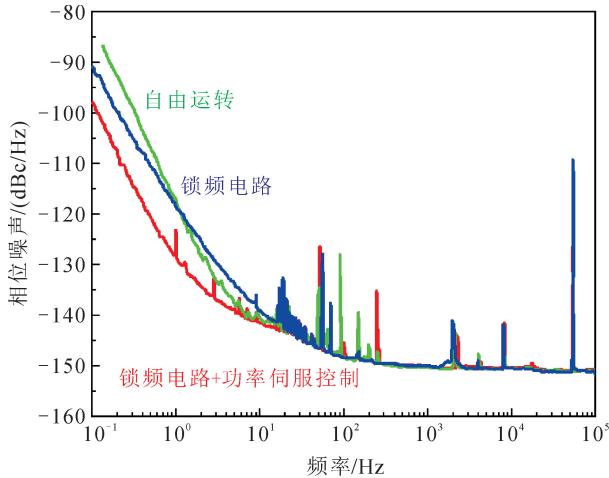


图 10 99.82 MHz 信号相位噪声

对于自由运转的低温蓝宝石振荡器, 其拟合曲线可以表示为

$$L_{\varphi}^{\text{free}} = 10 \log(10^{-11.7} f^{-3} + 10^{-13} f^{-1} + 10^{-15.06}) \quad (7)$$

在 $f < 1$ Hz 时, 相位噪声主要受闪烁频率噪声 (f^{-3}) 特性的影响, 导致的频率稳定度为 $\sigma_y = 2.35 \times 10^{-14} / 1$ s。在 $f \leq 400$ Hz 时, 主要受白噪声 (f^{-1}) 特性的影响。

对于带有 Pound 锁频环路的振荡器, 其拟合曲线可以表示为

$$L_{\varphi}^{\text{Pound}} = 10 \log(10^{-11.96} f^{-3} + 10^{-12.88} f^{-1} + 10^{-15.06}) \quad (8)$$

在 $f < 2$ Hz 时, 主要受闪烁频率噪声 (f^{-3}) 特性的影响, 由相位噪声导致的频率稳定度为 $\sigma_y = 1.74 \times 10^{-14} / 1$ s。在 $f \leq 40$ Hz 时, 主要受白噪声 (f^{-1}) 特性的影响。

对于带有 Pound 锁频电路和功率伺服控制电路的振荡器, 其拟合曲线表示为

$$L = 10 \log(10^{-12.96} f^{-3} + 10^{-13.11} f^{-1} + 10^{-15.06}) \quad (9)$$

在 $f < 2$ Hz 时, 主要受闪烁频率噪声 (f^{-3}) 特性

的影响, 由相位噪声导致的频率稳定度为 $\sigma_y = 5.52 \times 10^{-15} / 1$ s。在 $f \leq 40$ Hz 时, 主要受白噪声 (f^{-1}) 特性的影响。

频率稳定度的结果如图 11 所示绿线表示自由运转的稳定性, 蓝线表示带有锁频电路振荡器的稳定性, 红线表示带有锁频电路和功率控制电路振荡器的稳定性, 粉线表示超稳晶振输出的 10 MHz 信号频率稳定性。

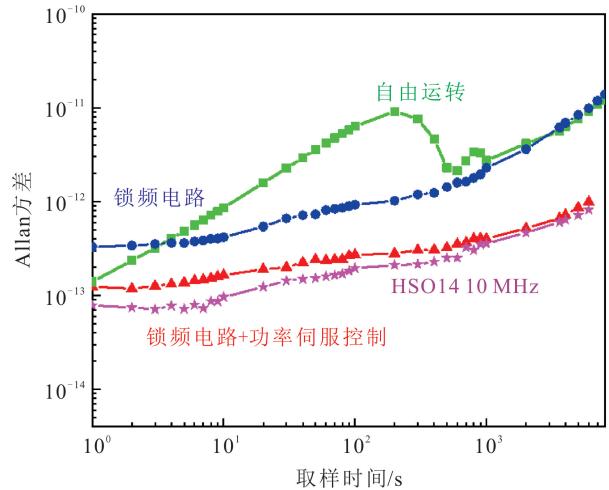


图 11 99.82 MHz 信号频率稳定性

对于不同振荡环路的振荡器, 其短期频率稳定性接近, 主要与低温谐振腔的 Q 值有关。对于自由运转的低温蓝宝石振荡器, 其稳定性在 $1 \sim 100$ s 的取样时间内, 呈现 $\sigma_{\text{free}} = 1.4 \times 10^{-13} \tau$ 趋势, 存在线性频率漂移。在取样时间 $\tau > 1000$ s 后, 呈现 $\sigma_{\text{free}} = 3 \times 10^{-12} \tau^{-1/2}$, 是典型的随机游走噪声, 这可能与 CSO 的环境温度波动有关。在取样时间 $100 \sim 1000$ s 间频率稳定性变差, 这可能是由于连接室温器件与低温谐振器的传输线缆中温度变化引起的相位波动造成的。带有 Pound 锁频电路的振荡器消除了这个效应, 在取样时间 $1 \sim 10$ s 内, 呈现 3×10^{-13} 典型的闪烁频率噪声, 在 10 s 后呈现 $\sigma_{\text{Pound}} = 3 \times 10^{-12} \tau^{-1/2}$, 是典型的随机游走噪声。带有 Pound 锁频环路与功率控制环路的振荡器受参考信号 HSO14 10 MHz 稳定度的限制, 稳定度随 τ 缓慢增加, 可能是由于 Pound 锁频环路中的环形器、检波器和隔离器均放置在室温环境中, 并不能抵消连接低温蓝宝石谐振腔到室温环境的半刚电缆的温度波动造成的。低温蓝宝石振荡器的参数及其对性能的影响总结为表 2。

表 2 7 K 低温蓝宝石振荡器参数

名称	参数	影响
工作模式	WGH _{15,0,0}	—
蓝宝石尺寸(mm)	D=54, H=30	—
频率-温度拐点	6.98 K	—
温度波动对稳定性的影响	3.9×10^{-14}	—
耦合系数	$\beta_1 = 0.77, \beta_2 = 0.55$	—
Q 值	$Q_0 = 1.45 \times 10^8$	短期频率稳定度(<100 s)
锁频环路对稳定性的影响	1×10^{-15}	中期频率稳定度(100 s < τ < 1 000 s)
功率控制环路对稳定性的影响	1×10^{-15}	长期频率稳定度(1 000 s < τ < 10 000 s)

4 结语

本文利用蓝宝石晶体工作在高阶回音壁模式在液氦温度下具有较高的 Q 值,在其频率温度拐点下具有超低的频率漂移,研制了低温蓝宝石谐振器,通过具有超高频率稳定度的微波振荡链路产生 9.98 GHz 频率信号,通过 100 分频后与超稳晶振进行互比,得到秒级频率稳定度为 1.23×10^{-13} 。在本研究中,其测试性能受限于参考信号的性能,下一步采用高性能微波源作为其参考信号进行比对,同时对谐振腔的参数进行进一步的优化,并且将 Pound 锁频电路中的环形器、检波器、隔离器放置在低温环境,改善其中长期频率稳定度。

参考文献:

- [1] GIORDANO V, MARGUERON S. On the degeneracy of whispering gallery modes in a high-Q sapphire microwave resonator[J]. 2023.
- [2] ABGRALL M, GUENA J, SANTARE I G L, et al. High-stability comparison of atomic fountains using two different cryogenic oscillators[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics & Frequency Control, 2016.
- [3] SANTARELLI G, LAURENT P, LEMONDE P, et al. Quantum projection noise in an atomic fountain: a high stability cesium frequency standard[J]. Physical Review Letters, 1999(82):4619-4622.
- [4] TAKAMIZAWA A, YANAGIMACHI S, HAGIMOTO K. First uncertainty evaluation of the cesium fountain primary frequency standard NMIJ-F2[J]. Metrologia, 2022, 59: 035004.
- [5] WANG Q, WEI R, WANG Y Z. Atomic fountain frequency standard: principle and development[J]. Acta Physica Sinica-chinese Edition, 2018, 67(16): 163202.
- [6] GUÉNA J, ABGRALL M, CLAIRON A, et al. Contribution to TAI with a secondary representation of the SI second[J]. Metrologia, 2014, 51(1): 108-120.
- [7] GIORDANO V, GROP S, DUBOIS B T, et al. New-generation of cryogenic sapphire microwave oscillators for space, metrology, and scientific applications [J]. Review of Scientific Instruments, 2012, 83(8): 085113.
- [8] GROP S, GIORDANO V, BOURGEOIS P Y, et al. ELISA: an Ultra-stable oscillator for ESA deep space antennas[C]//IEEE International Frequency Control Symposium Joint with the European Frequency & Time Forum, 2009.
- [9] NAND N R, HARTNETT J G, IVANOV E V, et al. Ultra-stable very-low phase-noise signal source for very long baseline interferometry using a cryocooled sapphire oscillator[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques, 2011, 59(11): 2978-2986.
- [10] DOLEMAN S, MAI T, ROGERS A E E, et al. Adapting a cryogenic sapphire oscillator for very long baseline interferometry[J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 2011, 123(582): 582-595.
- [11] TOBAR M E, IVANOV E N, WOOD R A, et al. Low noise 9 GHz sapphire resonator-oscillator with thermoelectric temperature stabilization at 300 Kelvin[J]. IEEE Microwave & Guided Wave Letters, 1995, 5(4): 108-110.
- [12] DOLGOVSKIY D, SCHILT S, BUCALOVIC N, et al. Ultra-stable microwave generation with a diode-pumped solid-state laser in the 1.5 μm range[J]. Applied Physics B, 2014, 116(3): 593-601.
- [13] 潘时龙, 刘世锋, 朱丹, 等. 基于光电振荡器的低相噪光生微波技术及其应用[J]. 微波学报, 2022, 38(5): 54-60.
- [14] KATARIA ND, KUMAR V. Frequency-temperature compensated whispering gallery mode dielectric resonator and oscillator[J]. Chinese Journal of Physics, 2004, 42(4): 444-450.
- [15] 范思晨, 杨帆, 阮军. 蓝宝石谐振体内的回音壁模电磁场分布[J]. 物理学报, 2022, 71(23): 208-215.