

引用格式:李棕可,张哲浩,王琳琳,等.Parabolic 方差在脉冲星时稳定度评估中的应用分析[J].时间频率学报, 2025,48(3):199-209.

# Parabolic 方差在脉冲星时稳定度评估中的应用分析

李棕可<sup>1,2,3</sup>, 张哲浩<sup>1,2,3</sup>, 王琳琳<sup>1,2,3</sup>, 王浙宇<sup>1,2,3</sup>,  
周祖荣<sup>1,2,3</sup>, 童明雷<sup>1,2,3,\*</sup>

1.中国科学院 国家授时中心,西安 710600;  
2. 时间基准及应用重点实验室(中国科学院),西安 710600;  
3.中国科学院大学,北京 100049

**摘要:**对原子时进行频率稳定度评估通常采用的是 Allan 方差和 Hadamard 方差,而对脉冲星时的频率稳定度评估一般使用  $\sigma_z(\tau)$ ,若要脉冲星时与原子时联合守时,需对脉冲星时和原子时稳定度进行统一评估。Parabolic 方差是类似于 Allan 方差的统计量,它弥补了 Allan 方差在短期无法识别高频噪声的缺陷,同时兼顾了其在长期的可计算性。分别利用仿真数据和中国科学院国家授时中心地方原子时(TA(NTSC))的实测数据对原子时进行了 parabolic 方差的稳定度评估,结果表明 parabolic 方差对常见噪声类型具有较好的响应,并且在检测低频红噪声方面比 Hadamard 方差更具优势。针对脉冲星时的稳定度评估,首先是根据国际脉冲星计时阵第二次发布数据中的 5 颗毫秒脉冲星观测数据经过等间隔处理后,利用经典加权算法建立了综合脉冲星时。最后利用 parabolic 方差和  $\sigma_z(\tau)$  对其进行了稳定度评估,在 5.12 年尺度上稳定度达到了  $4.48 \times 10^{-16}$ ,比稳定度最高的单星 PSR J1909-3744 提升了 61.71%,符合预期结果。

**关键词:**频率稳定度;parabolic 方差;原子时;综合脉冲星时

DOI:10.13875/j.issn.1674-0637.2025-03-0199-11

## Application analysis of parabolic variance in the stability evaluation of pulsar time scales

LI Zong-ke<sup>1,2,3</sup>, ZHANG Zhe-hao<sup>1,2,3</sup>, WANG Lin-lin<sup>1,2,3</sup>,  
WANG Zhe-yu<sup>1,2,3</sup>, ZHOU Zu-rong<sup>1,2,3</sup>, TONG Ming-lei<sup>1,2,3,\*</sup>

1.National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;  
2.Key Laboratory of Time Reference and Applications, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;  
3.University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract:** The Allan variance and Hadamard variance are commonly used to evaluate the frequency stability of atomic time, while the  $\sigma_z(\tau)$  is commonly used to evaluate the frequency stability of pulsar time. If pulsar time and atomic time are used jointly for timekeeping, a unified evaluation of the stability of

收稿日期:2024-12-03;接受日期:2025-01-12;\*通讯作者:mltong@ntsc.ac.cn

基金项目:科技部 SKA 专项(2020SKA0120103);中国科学院战略先导科技专项(A类)(XDA0350502);国家自然科学基金(U1831130);陕西省自然科学基金基础研究计划(2024JC-YBQN-0036)

both pulsar time and atomic time is required. The parabolic variance is a statistic similar to the Allan variance, which makes up for the shortcomings of the Allan variance in identifying high-frequency noise in the short term, while also taking into account its calculability in the long term. The parabolic variance is used to evaluate frequency stability for simulation data and actual measurements of the local atomic time from the National Time Service Center of the Chinese Academy of Sciences (TA(NTSC)), the results show that the parabolic variance has a good response to common noise types and has an advantage over the Hadamard variance in detecting low-frequency red noise. For the stability assessment of pulsar time, firstly, based on the observation data of five millisecond pulsars in the second release of the International Pulsar Timing Array, the ensemble pulsar time scale is established using a classical weighted algorithm after processing at equal intervals. Then the stability assessment is performed using parabolic variance and  $\sigma_z(\tau)$ , and the stability reaches  $4.48 \times 10^{-16}$  on the scale of 5.12-year, which is 61.71% higher than the single star PSR J1909-3744 with the highest stability and meets the expected results.

**Keywords:** frequency stability; parabolic variance; atomic time; ensemble pulsar time

频率稳定度是衡量一个时间尺度性能的重要指标,原子时是目前广泛采用的时间尺度,对其进行频率稳定度评估通常采用 Allan 方差<sup>[1]</sup>。若频率输出信号中存在线性频移,则采用 Hadamard 方差<sup>[2]</sup>能更为准确地反映其真实的频率稳定度水平。Parabolic 方差是一种类似于 Allan 方差的评估方法,它弥补了 Allan 方差在短期分析时无法辨别高频噪声的缺陷,同时相较于修正的 Allan 方差,能够评估更长尺度的稳定度<sup>[3]611</sup>。另外,相较于其他评估方法 parabolic 方差能以最短的数据长度来识别低频红噪声<sup>[4]</sup>,这对于降低检测低频噪声所需的数据记录成本具有重要意义。

脉冲星作为一种宇宙中稳定旋转的自然天体,因其极高的自转稳定度,目前正在被应用于建立脉冲星时间尺度<sup>[5]</sup>。使用大型射电望远镜可在地球上测量其脉冲到达时间(TOA),由于望远镜的调度需要根据实际情况综合考量任务的优先级别,对脉冲星的观测并不能保证做到等间隔,而传统的频率稳定度评估方法要求使用等间隔的钟差数据,所以如果沿用原子时的频率稳定度评估方法,就需要对计时残差作等间隔化处理。另一种直接适用于脉冲星非等间隔数据的频率稳定度评估方法是  $\sigma_z(\tau)$ ,同时由于其依据的是计时残差的三阶差分<sup>[6]</sup>,因此更适合处理具有频率漂移和低频红噪声的脉冲星计时残差数据<sup>[7]</sup>。

考虑到脉冲星时与原子时联合守时的应用,寻找一种统一评估脉冲星时和原子时的频率稳定度的方法具有重要研究意义。由于 parabolic 方差在检测低频红噪声等方面的卓越性能,可尝试将其作

为这种共同的频率稳定度评估标准。首先通过模拟数据验证其对常见幂律噪声和线性频率漂移的响应,及其在识别低频红噪声方面的优势。然后使用 parabolic 方差对真实的原子时数据进行频率稳定度评估,以期较好地反映数据包含的噪声情况。最后从国际脉冲星计时阵第二次发布的数据中选取五颗脉冲星数据构建综合脉冲星时间尺度(EPT)<sup>[8-9]</sup>,使用 parabolic 方差分别对单星和 EPT 进行稳定度评估,以期反映 EPT 相对单星而言具有更好的频率稳定度水平。

## 1 原子时的频率稳定度评估方法

### 1.1 原子钟噪声模型

由于内部的老化及外界环境的变化,原子钟的输出信号中包含多种噪声过程,一般表示为<sup>[10]5</sup>

$$V(t) = [V_0 + \epsilon(t)] \sin[2\pi\nu_0 t + \phi(t)]. \quad (1)$$

式(1)中,  $V_0$  表示标称峰值输出电压(标称振幅);  $\nu_0$  表示标称频率;  $\epsilon(t)$  表示振幅变化;  $\phi(t)$  表示相位变化。输出的正弦信号的瞬时相位为

$$\Phi(t) = 2\pi\nu_0 t + \phi(t). \quad (2)$$

输出的瞬时频率有

$$\nu(t) = \frac{\dot{\Phi}(t)}{2\pi} = \nu_0 + \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi}. \quad (3)$$

瞬时频率  $\nu(t)$  相对于标称频率  $\nu_0$  的归一化瞬时频率偏差定义为

$$y(t) \equiv \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi\nu_0}. \quad (4)$$

定义瞬时相对时间偏差(相位时间)<sup>[11]38</sup> 为

$$x(t) \equiv \frac{\phi(t)}{2\pi\nu_0} = x_0 + y_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + x_r(t). \quad (5)$$

式(5)中,  $x_0$  表示初始相位偏差,  $y_0$  表示初始频率偏差,  $a$  表示线性频率漂移(线性频漂),  $x_r$  表示随机项。  $x(t)$  和  $y(t)$  有如下关系:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (6)$$

真实测量的钟差数据是以  $\tau_0$  为间隔的序列, 因此

$$y_i(t) = \frac{x_{i+1}(t) - x_i(t)}{\tau_0}. \quad (7)$$

在频率稳定度评估过程中, 我们需要关注的就是  $x(t)$  和  $y(t)$  这两个偏差。

## 1.2 幂律噪声和线性频率漂移

频率源的随机相位和频率波动可以用幂律谱线性叠加的形式来模拟<sup>[12]</sup>:

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^4 h_\alpha f^\alpha. \quad (8)$$

式(8)中,  $f$  表示傅里叶频率,  $h_\alpha$  表示噪声强度系数,  $\alpha$  表示幂指数。大多数频率源的噪声过程可以通过幂律噪声的组合来建模, 常见的噪声类型与其对应的幂指数如表1所示。

表1 幂律噪声类型与其对应的幂指数

噪声类型	$\alpha$
调相白噪声(WPM)	2
调相闪烁噪声(FPM)	1
调频白噪声(WFM)	0
调频闪烁噪声(FFM)	-1
调频随机游走噪声(RWFM)	-2
调频闪烁游走噪声(FWFM)	-3
调频随机奔跑噪声(RRFM)	-4

另外, 由于外界各种因素的干扰和系统内部的老化会导致输出频率相对于标称频率波动<sup>[13]98</sup>, 在较长时间尺度上甚至表现出频率的漂移, 这通常可以用适当的数学模型(如线性、对数等)来分析。对于铷钟, 线性频漂尤为常见, 表现为  $y(t)$  随时间的线性增长, 累积时间越长线性频漂就越明显。

## 1.3 Allan 方差

由于频率源输出信号中含有非平稳噪声过程, 使用传统的标准方差评估其稳定度并不能保证收敛性<sup>[10]13</sup>。目前最常用的时域稳定度表征方法是 Allan 方差, 它基于频率数据的一阶差分, 相位数据的二阶差分定义<sup>[14]</sup>。对于频率数据, 可表示为

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{i=1}^{M-1} (\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i)^2. \quad (9)$$

式(9)中,  $M$  为  $\tau$  内所有平均相对频率偏差值  $\bar{y}_i$  的总数,

$$\bar{y}_i \equiv \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_i+\tau} y(t) dt. \quad (10)$$

$$\tau = m\tau_0. \quad (11)$$

式(10)和(11)中,  $\tau_0$  表示两个相邻相位数据点之间的间隔, 即最小测量间隔,  $\tau$  表示测量间隔, 也叫平均时间,  $m$  称为平均因子,  $\bar{y}_i$  即每个  $\tau$  内所有  $y_i$  的均值, 数据被划分以  $\tau$  为间隔的连续子序列。由式(8)可得到对于相位数据的 Allan 方差:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-2)} \sum_{i=1}^{N-2} (x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)^2. \quad (12)$$

式(12)中,  $N$  表示  $x_i$  的总数,  $N = M + 1$ ,  $x_i$  为相邻测量间隔的相位时间测量值。通常采用 Allan 方差 ( $\sigma_y^2(\tau)$ ) 的算术平方根 Allan 偏差 ( $\sigma_y(\tau)$ ) 与  $\tau$  的对数坐标关系图来反映原子钟在各尺度  $\tau$  的频率稳定度水平。

## 1.4 Hadamard 方差

对于存在线性频漂的铷原子钟来说, 使用  $\sigma_y(\tau)$  进行频率稳定度评估在较长尺度的  $\tau$  上将会发散。Hadamard 方差依据频率数据的二阶差分, 相位数据的三阶差分定义, 它的优点是对线性频率漂移不敏感, 且能识别更低频率的噪声(FWFM、RRFM)<sup>[10]20</sup>, 对于相位数据一般表示为

$$\sigma_H^2(\tau) = \frac{1}{6(N-3m)\tau^2} \sum_{i=1}^{N-3} (x_{i+3} - 3x_{i+2} + 3x_{i+1} - x_i)^2. \quad (13)$$

与 Allan 方差相同, 通常采用 Hadamard 方差 ( $\sigma_H^2(\tau)$ ) 的算术平方根 Hadamard 偏差 ( $\sigma_H(\tau)$ ) 与  $\tau$  的对数坐标关系图来反映稳定度水平。

在实际计算  $\sigma_y(\tau)$  或  $\sigma_H(\tau)$  时,  $\tau$  通常选取  $\tau_0$ ,  $2\tau_0$ ,  $4\tau_0$ ,  $8\tau_0$ ,  $\dots$ , 直到对数据的划分少于四个子序列, 此时数据被分为三段, 对应三个  $\bar{y}_i$ , 也就是对应四个  $x_i$  (最后这次选取需进行计算), 选取其他  $\tau$  与这些值对应的稳定度计算值并不相互独立。

## 1.5 重叠采样

实际情况下, 不可能在同一时间段对频率源输出信号无限次测量, 所以使用  $\sigma_y(\tau)$  或  $\sigma_H(\tau)$  来计算某一时间段内钟差数据的频率稳定度, 本质上是对真实频率稳定度的估计, 这种估计通常服从卡方分布<sup>[15]</sup>, 容易得到真实方差的双边置信区间<sup>[16]</sup>为

$$s^2 \cdot \frac{v}{\chi^2(\rho, v)} < \sigma^2 < s^2 \cdot \frac{v}{\chi^2(1-\rho, v)} \quad (14)$$

式(14)中,  $s^2$  表示样本方差, 也就是计算得到的方差估计值, 表示  $\sigma^2$  真实方差,  $\chi^2$  表示卡方值,  $v$  表示自由度,  $\rho$  表示置信水平。在置信水平已经设定的情况下, 样本的自由度越高, 卡方值就越大, 置信区间的边界越接近真实方差, 估计越准确。为提高样本的自由度, 使稳定度估计更加准确, 使用各方差估计频率稳定度时可以进行重叠采样, 采样过程如图 1 所示。

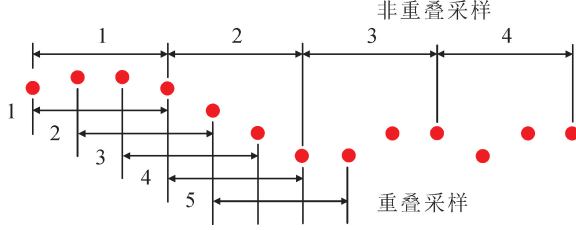


图 1 重叠采样与非重叠采样示意图<sup>[10]15</sup>

应用重叠采样可得到重叠 Allan 方差和重叠 Hadamard 方差:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(T-2m)\tau^2} \sum_{i=1}^{T-2m} (x_{i+2m} - 2x_{i+m} + x_i)^2, \quad (15)$$

$$\sigma_H^2(\tau) = \frac{1}{6(T-3m)\tau^2} \sum_{i=1}^{T-3m} (x_{i+3m} - 3x_{i+2m} + 3x_{i+m} - x_i)^2. \quad (16)$$

式(15)和(16)中, 其中  $T$  表示原始相位数据的总数。在实际计算中, 常利用重叠采样使稳定度估计更为准确。后续章节若无特别说明,  $\sigma_y^2(\tau)$  和  $\sigma_H^2(\tau)$  即表示重叠形式的 Allan 方差和 Hadamard 方差, 实际计算时也均采用重叠采样形式进行计算。

## 1.6 Parabolic 方差

当频率源的噪声是 WPM 和 FPM 时,  $\sigma_y^2(\tau)$  表现出明显的缺陷, 需要改变测量系统的截止频率才能辨别这两种高频噪声<sup>[13]106</sup>。修正的  $\sigma_y^2(\tau)$ <sup>[17]</sup> 可解决这一问题, 但同时也会损失可计算  $\tau$  的最大尺度。Vernotte 等<sup>[3]611</sup> 在 2016 年提出一种新的统计量 parabolic 方差, 它结合了  $\sigma_y^2(\tau)$  的长期可计算性和修正  $\sigma_y^2(\tau)$  的短期良好响应, 并且能以最短的数据记录来检测红噪声。对于相位数据, parabolic 方差可表示为<sup>[3]615</sup>:

$$\sigma_P^2(\tau) = \frac{72}{Mm^4\tau^2} \sum_{i=0}^{M-1} \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \left( \frac{m-1-2k}{2} \right) (x_{i+k} - x_{i+m+k}) \right]^2, \quad (17)$$

$$M = N - 2m + 2, m \geq 2,$$

$$\sigma_P^2(\tau) = \sigma_y^2(\tau), m = 1. \quad (18)$$

较低频的噪声 (例如 FFM、RWFM) 需要在较长  $\tau$  尺度上才能显现, 因此对于存在低频噪声的频率源来说, parabolic 方差 ( $\sigma_P^2(\tau)$ ) 以最短的数据记录来检测红噪声节约了时间和物力成本。

## 2 脉冲星时的频率稳定度评估方法

与原子钟数据类型不同, 脉冲星的数据通常为非等间隔, 使用  $\sigma_y(\tau)$ ,  $\sigma_H(\tau)$  或  $\sigma_P(\tau)$  对其进行频率稳定度评估之前需要做等间隔化处理, 具体可采用线性插值、三次样条插值、区间平均插值等方法。另一种针对脉冲星时的方法是  $\sigma_z(\tau)$ , 它可直接对非等间隔数据进行频率稳定度评估。

### 2.1 脉冲星计时模型

脉冲星发出射电辐射被地球上的射电望远镜接收到, 途经遥远的宇宙空间, 因此建立计时模型, 需要考虑脉冲星的本征特性以及传播效应, 经过坐标变换和各种物理效应的改正, 计时模型一般可表示为<sup>[18]</sup>

$$t_e^{\text{psr}} = t_a^{\text{obs}} - \Delta_{\odot} - \Delta_{\text{IS}} - \Delta_{\text{B}}. \quad (19)$$

式(19)中,  $t_e^{\text{psr}}$  表示脉冲星射电辐射的发射时间,  $t_a^{\text{obs}}$  表示射电辐射到达射电望远镜的时间 (即脉冲到达时间, TOA),  $\Delta_{\odot}$  包括到太阳系质心 (SSB) 坐标系的坐标变换, 与地球轨道运动和地球的自旋、岁差和章动有关的真空传播延迟, 以及由于信号通过地球大气层和太阳系而产生的多余延迟。  $\Delta_{\text{IS}}$  包括由太阳系质心向双星系统质心 (BB) 坐标系的变换、由于系统相对长期运动而产生的真空传播延迟, 以及由于信号通过星际介质 (ISM) 而产生的传播延迟。  $\Delta_{\text{B}}$  包括从双星质心到脉冲星参考架的变换, 由双星轨道运动引起的真空延迟, 以及由信号通过伴星引力场引起的多余延迟。

使用最小二乘法拟合  $\text{TOA}(t_{\text{obs}})$ , 可获得待定的脉冲星计时模型参数<sup>[19]</sup>, 然后由计时模型计算得到 TOA 的模型预测值 ( $t_{\text{model}}$ ), 进而得到计时残差:

$$R = t_{\text{obs}} - t_{\text{model}}. \quad (20)$$

评估脉冲星频率稳定度的直接数据来源就是计时残差, 对其进行有效评估, 研究其中包含的各种噪声, 对于脉冲星时间尺度的建立具有重要意义。

### 2.2 $\sigma_z(\tau)$ 评估方法

接收脉冲星射电信号需要高灵敏度的大口径射电望远镜, 由于科学任务的安排无法保证对脉冲星做到等间隔观测, 针对脉冲星数据非等间隔的特



性,Matsakis 等<sup>[20]924</sup> 在 1997 年提出了一种新的评估方法  $\sigma_z(\tau)$ ,它依据计时残差的三阶差分来定义,在具体计算时,首先将计时残差及其误差按照修正儒略日(MJD)从小到大的顺序进行排列,将数据划分为以  $\tau$  为间隔的连续子序列,然后使用三次多项式对每一子序列进行最小二乘拟合,使得  $[(x_i - X(t_i))/\sigma_i]^2$  的和最小,三次多项式的形式为

$$X(t)=c_0+c_1(t-t_0)+c_2(t-t_0)^2+c_3(t-t_0)^3,$$

(21)

式(21)中, $t_0$  为指定的参考时刻,一般选取子序列的中点对应值。MJD= $t_i$  时刻对应的计时残差及其误差为  $x_i$  和  $\sigma_i,i=1,\cdots,N$ ,选取的数据总时间跨度为  $T=t_N-t_1$ ,定义  $\sigma_z(\tau)$  为<sup>[20]925</sup>

$$\sigma_z(\tau)=\frac{\tau^2}{2\sqrt{5}}\langle c_3^2\rangle^{1/2}.$$

(22)

式(22)中, $\langle\rangle$ 表示对所有子序列得到的三次多项式系数  $c_3$  的平方做加权平均,权重反比于  $c_3$  误差的平方。在实际计算时  $\tau$  通常选取  $T,T/2,T/4,T/8,\cdots$ ,直到不存在有效子区间为止(有效子区间内至少有四个数据点),选取其他  $\tau$  与这些值对应的  $\sigma_z(\tau)$  并不相互独立。

以上叙述的关于原子时的稳定度评估方法同样适用于等间隔分布的计时数据所构建的脉冲星时。接下来分别从仿真数据,原子时数据和脉冲星时数据出发研究不同评估方法之间的有机结合,目的是提出一种既能适用于原子时又能适用于脉冲星时的频率稳定度评估方法。

### 3 结果分析

#### 3.1 仿真数据评估结果

##### 3.1.1 $\sigma_P(\tau)$ 对幂律噪声及线性频漂的响应

使用  $\sigma_y(\tau)$  进行频率稳定度评估时,通常绘制  $\sigma_y(\tau)$  与  $\tau$  在双对数坐标系下的关系图来反映稳定度水平。由于  $\sigma_y(\tau)$  也可以用  $S_y(f)$  的谱密度表示,单一幂律噪声和线性频漂的稳定度曲线在图上近似表现为一定斜率的直线。图 2 是对仿真调频白噪声的评估,容易看出对各点作线性拟合后的斜率近似为  $-0.5$ ,即  $\Delta(\lg(\sigma_y(\tau)))/\Delta(\lg(\tau))\approx-0.5$ 。

$\sigma_y(\tau)$  和  $\sigma_H(\tau)$  对于幂律噪声和线性频漂的响应已发表过较多成熟的结论<sup>[13]104</sup>,这里不再展开讨论。重点使用仿真数据验证  $\sigma_P(\tau)$  对于幂律噪声和线性频漂的良好响应,及其检测低频红噪声方面的优势。仿真数据参数设定如表 2 所示。

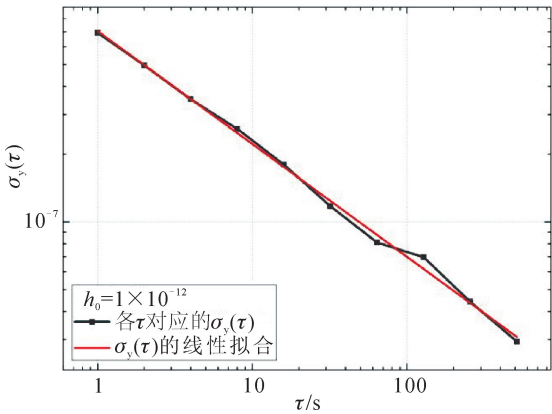


图 2 使用  $\sigma_y(\tau)$  评估 WFM( $\alpha=0$ ) 的频率稳定度

表 2 仿真幂律噪声和线性频漂的参数设定

参数名称	参数值
采样间隔	$\tau_0=1\text{ s}$
样本总数	$N=2\ 048$
噪声强度系数	$h_2=h_1=h_0=h_{-1}=h_{-2}=1\times 10^{-12}$
频率漂移率	$1\times 10^{-12}\text{ Hz/s}$
高通截止频率	$1/256N\tau_0$
低通截止频率	$1/2\tau_0$

按照设定参数对 5 种幂律噪声和线性频漂各进行 1 000 次仿真。计算每次仿真数据的  $\sigma_P(\tau)$  值并进行幂律函数拟合(即在双对数坐标上进行线性拟合):

$$y=b_i x^{k_i},$$

(23)

$$\lg(y)=k_i\cdot\lg(x)+\lg(b_i),$$

(24)

$$\lg(\sigma_P(\tau))=k_i\cdot\lg(\tau)+C_i,$$

(25)

$$k=\frac{1}{1\ 000}\sum_{i=1}^{1\ 000}k_i,\quad C=\frac{1}{1\ 000}\lg\left(\prod_{i=1}^{1\ 000}b_i\right).$$

(26)

结果如图 3 所示,统计 1 000 次拟合斜率的均值  $k$  和标准差,与理论斜率值吻合(表 3),表明  $\sigma_P(\tau)$  能够较好地识别各幂律噪声和线性频漂。

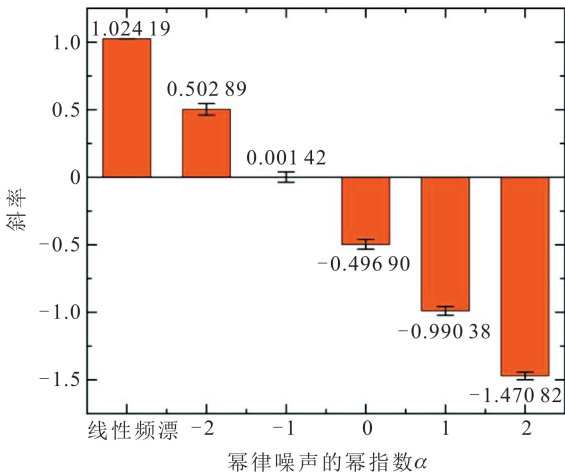


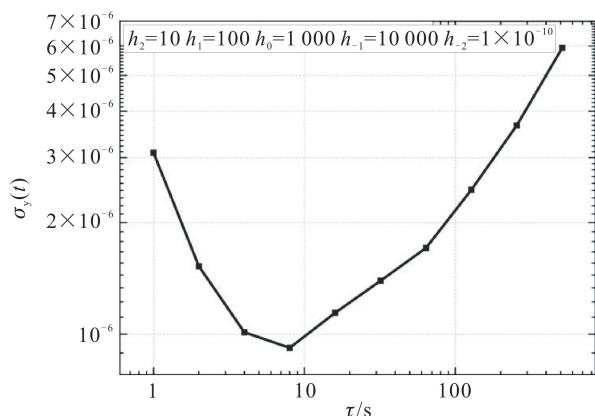
图 3  $\sigma_P(\tau)$  对 1 000 次仿真幂律噪声和线性频漂响应的计算值统计

表 3  $\sigma_p(\tau)$  对幂律噪声和线性频漂响应的理论值

$\alpha$	线性频漂	-2	-1	0	1	2
斜率	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5

### 3.1.2 使用 $\sigma_p(\tau)$ 检测低频红噪声

真实的钟差数据常常同时含有多种幂律噪声,对混合幂律噪声进行频率稳定度评估,高频噪声对应的频率稳定度曲线斜率比较小,往往在  $\tau$  较小端显现,低频噪声对应的频率稳定度曲线斜率比较大,往往在  $\tau$  较大一端显现。随着  $\tau$  的增大,频率稳定度图上的斜率会由小变大,如图 4 所示。

图 4  $\sigma_y(\tau)$  对仿真混合幂律噪声的频率稳定度评估

简单地,考虑数据中仅存在两种噪声的混合,单独对较高频噪声和较低频噪声进行频率稳定度评估,图上出现的第一个交点正是直接对混合噪声评估的斜率转折点,此时低频噪声在较长时间尺度上超过高频噪声的水平。利用此原理可在混合噪声中检测出低频成分,第一个交点对应的  $\tau$  即检测出低频成分所需的最短数据记录长度。使用  $\sigma_p(\tau)$  对检测原理做一个简单验证,如图 5 所示,对混合调频白噪声和调频闪烁噪声的仿真数据进行稳定度评估,可以看到在  $\tau$  较小一端,与单独对调频白噪声评估的结果基本一致,表示在短期上噪声由高频成分主导;在  $\tau$  较大一端,与单独对调频闪烁噪声评估的结果基本一致,表示在长期上噪声由低频成分主导。

为保证结果具有较高的可靠性,设定检测到低频噪声的概率不低于 97.5%,在对高频成分做评估时,计算出  $\sigma_p(\tau)$  的 95% 置信区间(依据卡方分布的  $2\sigma$  边界),取其上边界与低频成分稳定度曲线的第一个交点对应的  $\tau$  作为检测出低频成分所需的最短数据记录长度。如图 6 中紫色线标定了交点的横坐标。同样地,使用  $\sigma_y(\tau)$  和  $\sigma_H(\tau)$  对仿真数据进行频率稳定度评估,在 WFM 存在的情况下,检测 FFM,并保证检测到低频噪声的概率为 97.5% 以上。

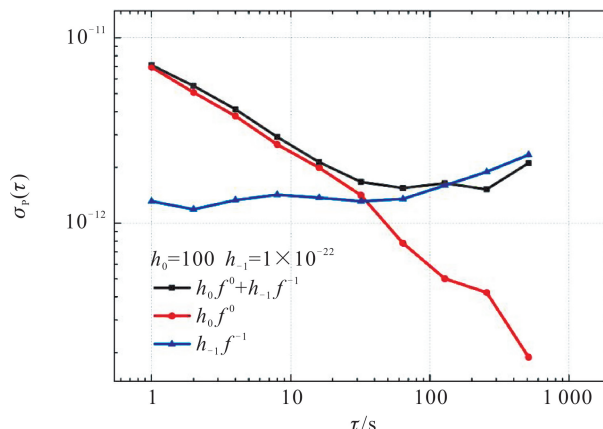


图 5 对噪声检测原理的验证

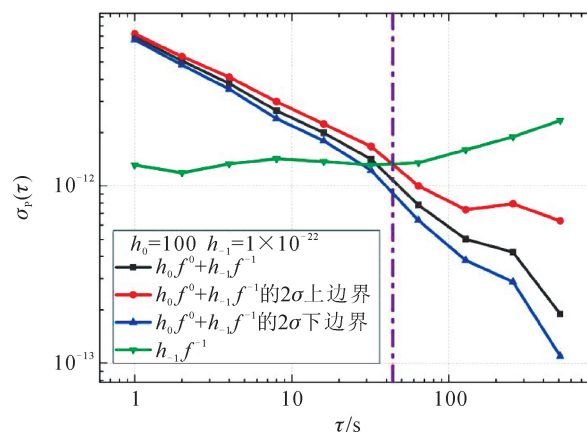
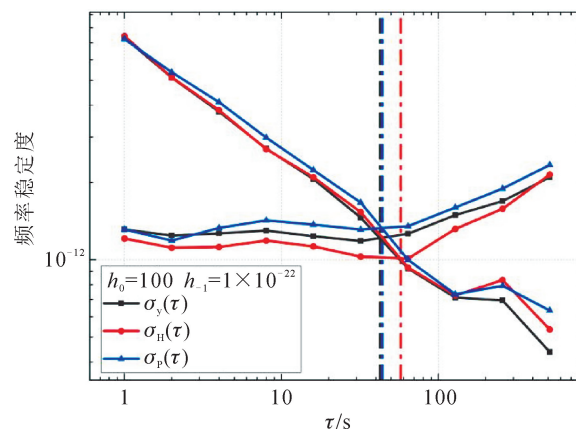
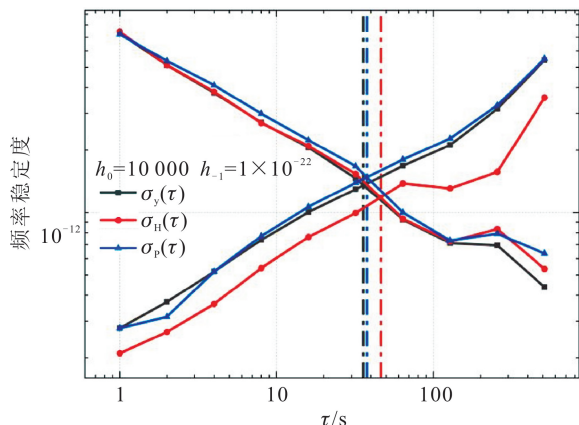
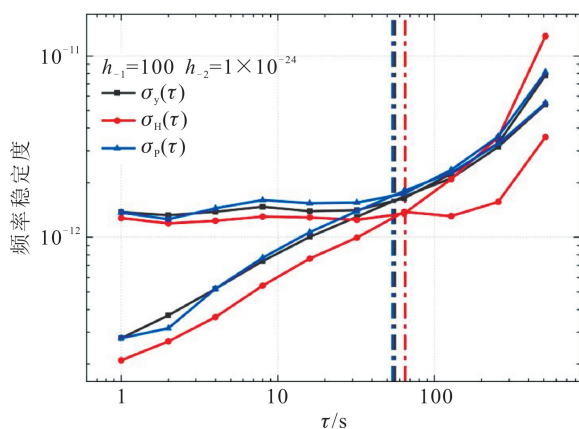


图 6 保证检测到低频噪声的概率不低于 97.5%

如图 7 所示,  $\sigma_p(\tau)$  在 WFM 中检测出 FFM 所需的最短数据记录长度明显短于  $\sigma_H(\tau)$ , 并且与  $\sigma_y(\tau)$  相当。如图 8 所示,  $\sigma_p(\tau)$  在 WFM 中检测出 RWFM 所需的最短数据记录长度明显短于  $\sigma_H(\tau)$ , 并且与  $\sigma_y(\tau)$  相当。如图 9 所示,  $\sigma_p(\tau)$  在 FFM 中检测出 RWFM 所需的最短数据记录长度明显短于  $\sigma_H(\tau)$ , 并且与  $\sigma_y(\tau)$  相当。综上所述,  $\sigma_p(\tau)$  在 WFM 和 FFM 存在的情况下检测低频红噪声的能力与  $\sigma_y(\tau)$  相当, 所需的最短数据记录长度比  $\sigma_H(\tau)$  要短。

图 7 存在 WFM( $\alpha=0$ ) 的情况下检测 FFM( $\alpha=-1$ )

图8 存在 WFM( $\alpha=0$ )的情况下检测 RWFM( $\alpha=-2$ )图9 存在 FFM( $\alpha=-1$ )的情况下检测 RWFM( $\alpha=-2$ )

### 3.2 原子时数据评估结果

已经使用仿真数据显示了  $\sigma_P(\tau)$  对于幂律噪声和线性频漂的良好响应, 以及其在检测低频红噪声方面的优势, 下面从原子时数据出发, 检测其对真实钟差数据的噪声响应能力。从国际计量局 (BIPM) 官网下载国家授时中心 (NTSC) 地方原子时与国际原子时之间的钟差数据 TAI-TA(NTSC) 以及 BIPM 发布 2023 年版地球时 TT(BIPM23) 的数据, 将 TA(NTSC) 溯源至 TT 可得到以 10 d 为间隔的连续等间隔钟差数据, 图 10 是用钟差计算得到的频率差数据。图 10 中横坐标的最小刻度值为 1 000 d, 容易看出从 2014 年 6 月 1 日~2019 年 11 月 22 日(对应 MJD 为 56 809~58 809) 出现明显的频率漂移, 选取这一段钟差数据进行频率稳定度评估, 结果如图 11 所示。可以看到  $\tau$  大于 80 d 后, 频率稳定度曲线均出现增长的趋势, 这表明在较长的时间尺度上频率漂移逐渐显现,  $\sigma_P(\tau)$  与  $\sigma_Y(\tau)$  能够较好地检测出频率漂移, 相比之下  $\sigma_H(\tau)$  对于频率漂移不敏感。

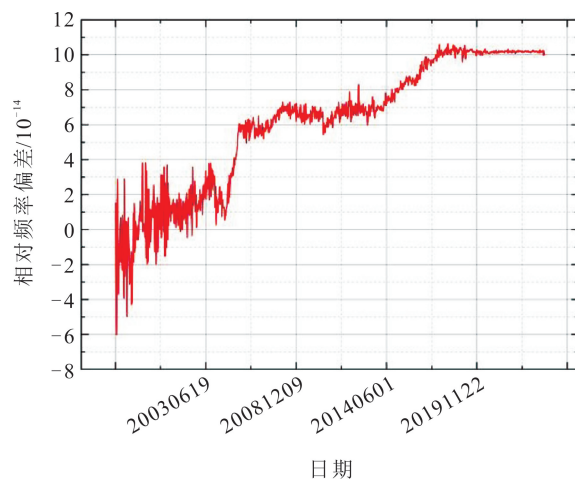


图10 TA(NTSC)-TT(BIPM23)的频率数据

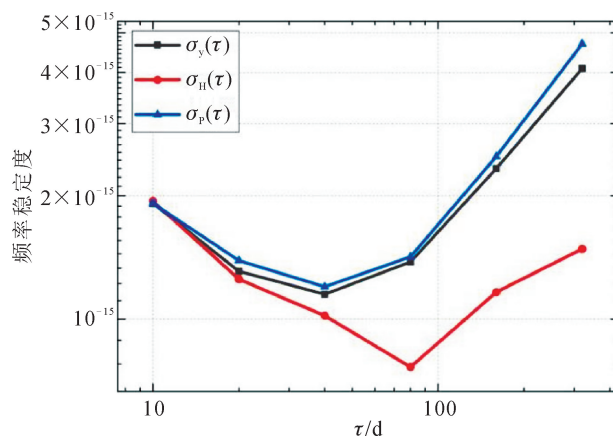


图11 识别 TA(NTSC)-TT(BIPM23)钟差数据中的频漂

### 3.3 脉冲星时数据评估结果

$\sigma_P(\tau)$  弥补了  $\sigma_Y(\tau)$  在短期分析时无法辨别高频噪声的缺陷, 同时兼顾了  $\sigma_Y(\tau)$  的长期可计算性, 并且相较于其他方法在检测低频红噪声方面有较大的优势, 因此考虑将此作为一种既能适用于原子时又能适用于脉冲星时的频率稳定度评估方法。需要注意的是, 与原子时钟差数据不同, 脉冲星的计时残差数据是非等间隔的, 因此使用  $\sigma_P(\tau)$  对其进行频率稳定度评估之前, 首先要对数据进行等间隔化处理, 下面使用  $\sigma_P(\tau)$  对单脉冲星时和综合脉冲星时 (EPT) 进行频率稳定度评估, 期望得到 EPT 比任一单星具有更好的频率稳定度。

从国际脉冲星计时阵列 (IPTA) 第二次发布的数据中选取 5 颗星计时精度较高, 且红噪声不显著的毫秒脉冲星<sup>[21]</sup> 采用经典加权法构建 EPT。它们的基本参数如表 4 所示, 其中 Span 表示数据跨度, 单位是年(a); Ntoa 表示脉冲到达时间的个数; Wrms 表示残差的加权算数均方根, 单位是微秒( $\mu$ s)。所选



脉冲星的数据跨度大,数据点个数多,Wrms 较低,且 Keith 等人<sup>[22]</sup>给出的 DM 模型均已包含在脉冲星的计时解算中<sup>[23]</sup>。使用脉冲星计时分析软件包 Tempo2<sup>[24]</sup>可分别得到每颗星的计时残差,多次拟合至 Wrms 收敛后输出最终的残差数据,此时达到最优的模型参数,结果如图 12 所示,然后选取它们 MJD 的交集边界(53 041~56 796)作为共同起始点,进行等间隔处理。每隔 30 d 对残差数据作一次平均,均值作为每个小区间 MJD 中值对应的残差值,数据总

时间跨度大约 10.28 a,结果如图 13 所示。

表 4 所选毫秒脉冲星的基本参数

脉冲星	Span/a	Ntoa	Wrms/ $\mu$ s
PSR J0437-4715	18.6	5 302	1.12
PSR J0613-0200	16.0	9 322	1.21
PSR J1713+0747	22.5	17 487	0.24
PSR J1744-1134	19.9	9 834	0.81
PSR J1909-3744	10.8	11 483	0.20

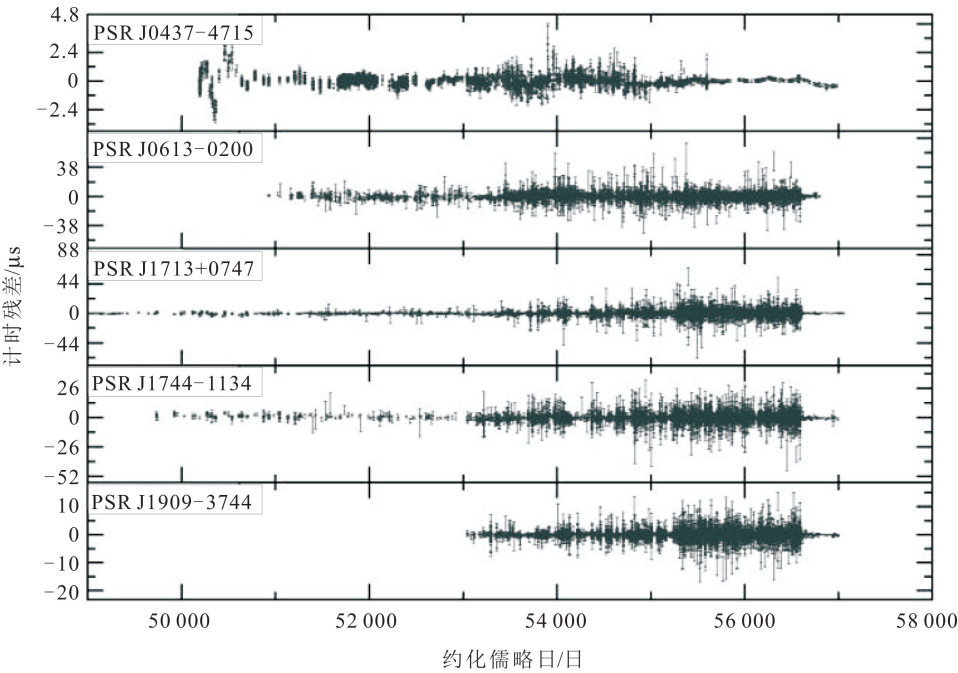


图 12 拟合至 Wrms 收敛后输出的计时残差数据

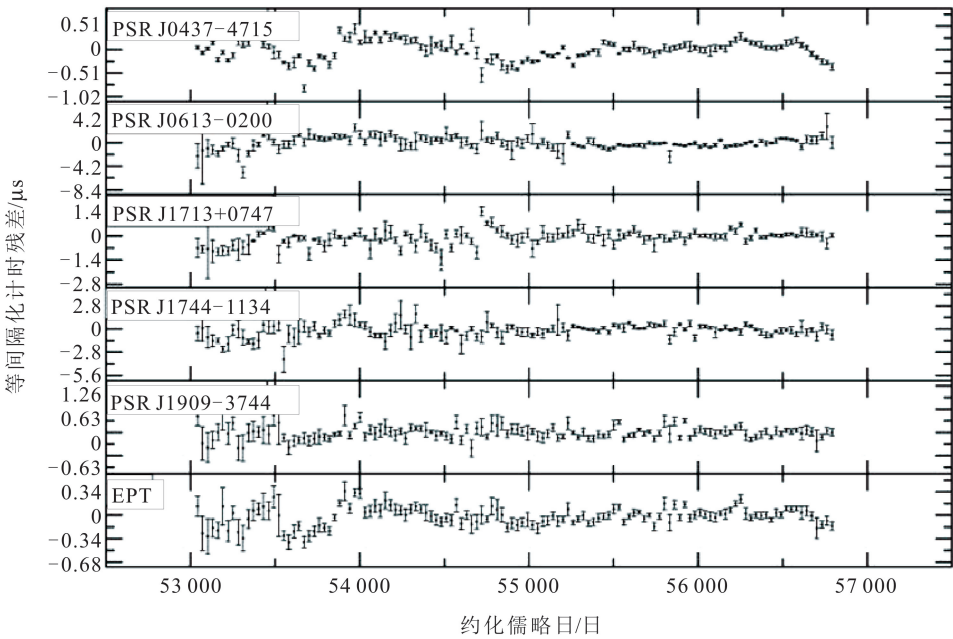


图 13 等间隔化计时残差数据(间隔为 30 d)



对于  $N$  颗脉冲星的观测数据,它们的读数为  $h_i(t), i=1, 2, \dots, N$ 。

(27)

根据经典加权算法计算得到  $EPT(t)$ ,一般形式为

$$EPT(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) \cdot h_i(t), \sum_{i=1}^N \omega_i(t) = 1. \quad (28)$$

式(28)中, $\omega_i(t)$ 是第  $i$  颗星的权重, $EPT(t)$ 的噪声是所有脉冲星噪声的加权平均:

$$\epsilon_s(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) \cdot \epsilon_i(t). \quad (29)$$

为使综合脉冲星时的噪声最小,以式(30)决定权重:

$$\omega_i(t) = \frac{1/\sigma_j^2}{\sum_{j=1}^N 1/\sigma_j^2}, j=1, 2, \dots, N. \quad (30)$$

式(30)的  $\sigma_j$  分别取每颗脉冲星最终计时残差数据(图 13)的算术均方根(RMS)和  $\sigma_z(\tau=5.12 \text{ a})$ ,各星的权重占比如表 5 和表 6 所示。

表 5 脉冲星权重(依据  $1/\text{RMS}^2$  取权)

脉冲星	RMS/ $\mu\text{s}$	权重占比
PSR J0437-4715	0.174	36.555%
PSR J0613-0200	0.782	1.446%
PSR J1713+0747	0.256	8.892%
PSR J1744-1134	0.573	2.442%
PSR J1909-3744	0.091	50.665%

表 6 脉冲星权重(依据  $1/\sigma_z^2(5.12 \text{ a})$  取权)

脉冲星	$\sigma_z$	权重占比
PSR J0437-4715	$4.92 \times 10^{-15}$	4.83%
PSR J0613-0200	$7.62 \times 10^{-15}$	2.02%
PSR J1713+0747	$5.84 \times 10^{-15}$	3.43%
PSR J1744-1134	$5.22 \times 10^{-15}$	4.29%
PSR J1909-3744	$1.17 \times 10^{-15}$	85.44%

使用  $\sigma_p(\tau)$  对单脉冲星时和 EPT 进行频率稳定度评估的结果如图 14 所示。可以看到依据表 4 构建的 EPT(图中黑线)在短期的稳定度(30~240 d)要优于任一单星。同时使用  $\sigma_z(\tau)$  对单脉冲星时和 EPT 进行频率稳定度评估,结果如图 15 所示,可以看到依据表 5 构建的 EPT(图中红线)的长期稳定度(2~8 a)要优于任一单星。在  $\tau=5.12 \text{ a}$  的稳定度达到了  $4.48 \times 10^{-16}$ 。

改进维纳滤波算法也是建立综合脉冲星时的有效方法,作为对比,将其计算结果也展示在了图

14 和 15 中,具体算法和计算流程见文献[9],结果显示,改进维纳滤波算法建立的 EPT 在整个时间尺度上具有更高的稳定度。

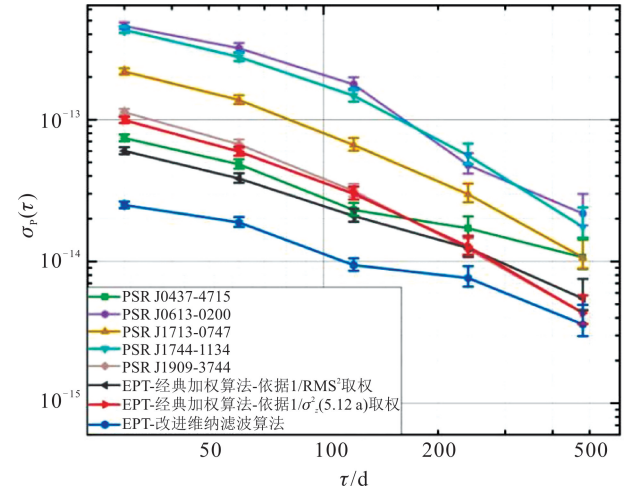


图 14  $\sigma_p(\tau)$  对单脉冲星时和 EPT 的频率稳定度评估

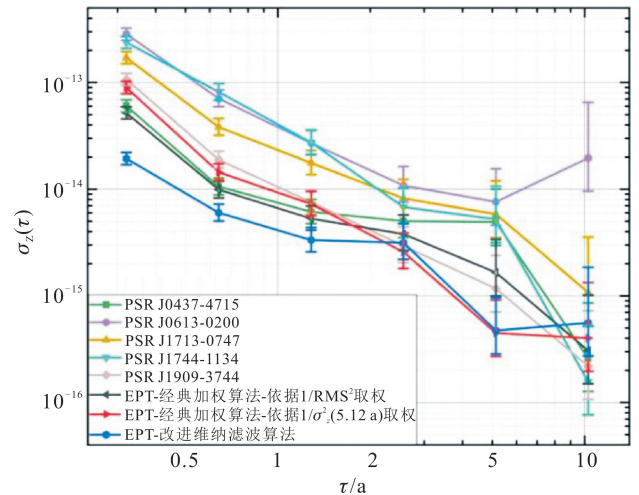


图 15  $\sigma_z(\tau)$  对单脉冲星时和 EPT 的频率稳定度评估

最后利用不同的评估方法对由表 4 构建的 EPT 进行了稳定度评估,如图 16 所示。使用  $\sigma_p(\tau)$  评估的结果与  $\sigma_y(\tau)$  以及  $\sigma_H(\tau)$  基本一致。在实际计算时, $\sigma_p(\tau)$  与  $\sigma_y(\tau)$  以及  $\sigma_H(\tau)$  一样, $\tau$  通常从最小测量间隔  $\tau_0$  开始,依次选取  $\tau_0, 2\tau_0, 4\tau_0, 8\tau_0, \dots$ ,直到对数据的划分少于四个子序列时结束,此时数据被分为三段,对应三个  $\bar{y}_i$ ,也就是对应四个  $x_i$ (最后这次选取需进行计算),选取其他  $\tau$  则与这些值对应的稳定度计算值并不相互独立。而  $\sigma_z(\tau)$  通常从数据的总跨度  $T$  开始,依次选取  $T, T/2, T/4, T/8, \dots$ ,作为测量间隔,直到有子序列出现少于四个数据点时停止选取(最后这次选取不进行计算),这就导致使用  $\sigma_y(\tau)$ 、 $\sigma_H(\tau)$  和  $\sigma_p(\tau)$  更适用于计算短期稳定度,

而  $\sigma_z(\tau)$  则更适用于计算长期稳定度。

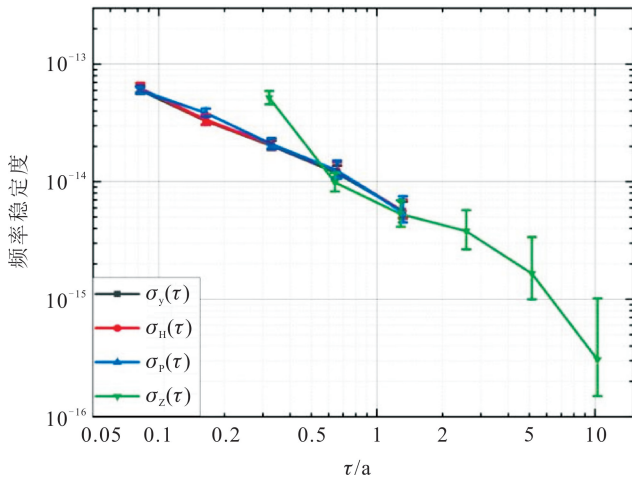


图 16 不同评估标准对 EPT 的频率稳定度评估

## 4 结语

本文研究了 parabolic 方差在脉冲星时稳定度评估中的应用。首先从仿真数据出发,分别统计了  $\sigma_P(\tau)$  对各噪声类型在双对数坐标上的响应斜率值,结果与理论斜率值较好吻合,验证了  $\sigma_P(\tau)$  对常见幂律噪声和线性频漂具有较好响应。接着对两种混合幂律噪声中的各成分进行了仿真,评估结果显示  $\sigma_P(\tau)$  以 97.5% 的概率从较高频噪声中检测出低频红噪声所需的最短数据记录长度比  $\sigma_H(\tau)$  要短,表明了其在检测低频红噪声方面的优势。然后从真实数据出发,选取了 TA(NTSC)-TT(BIPM23) 中包含频率漂移的一段数据,对其作稳定度评估,结果显示  $\sigma_P(\tau)$  和  $\sigma_y(\tau)$  能够对线性频漂作出较好响应,  $\sigma_H(\tau)$  对线性频漂不敏感。最后选取 IPTA 第二次发布数据中的 5 颗脉冲星依据经典加权法构建了 EPT,使用  $\sigma_P(\tau)$  对等间隔计时残差数据进行频率稳定度评估,结果显示依据 RMS 构建的 EPT 在 30~240 d 的  $\tau$  尺度上比单星具有更高的频率稳定度,依据  $\sigma_z(5.12 \text{ a})$  构建的 EPT 在 2~8 a 的  $\tau$  尺度上比单星具有更高的频率稳定度,与预期结果符合。另外依据改进维纳滤波算法建立的 EPT 在整个时间尺度上具有更高的稳定度。相比于  $\sigma_y(\tau)$ 、 $\sigma_H(\tau)$  和  $\sigma_P(\tau)$ ,使用  $\sigma_z(\tau)$  更适合评估脉冲星时的长期稳定度,结合  $\sigma_P(\tau)$  在短期评估的优势,可以考虑将  $\sigma_P(\tau)$  作为一种既能适用于原子时又能适用于脉冲星时的频率稳定度评估方法。

## 参考文献:

[1] ALLAN D W. Statistics of atomic frequency standards

- [J]. Proceedings of the IEEE, 1966, 54(2): 221-230.
- [2] BAUGH R A. Frequency modulation analysis with the Hadamard variance [C]// 25th Annual Symposium on Frequency Control. IEEE, 1971: 222-225.
- [3] FRANÇOIS V, MICHEL L, BOURGEOIS P Y, et al. The parabolic variance (PVAR): A wavelet variance based on the least-square fit [J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2015, 63(4): 611-623.
- [4] CHEN S Y, FRANÇOIS V, Rubiola Enrico. Applying clock comparison methods to pulsar timing observations [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2021, 503(3): 4496-4507.
- [5] PETIT G, TAVELLA P. Pulsars and time scales [J]. Astronomy and Astrophysics, 1996: 290-298.
- [6] TAYLOR J H J. Millisecond pulsars: nature's most stable clocks [J]. Proceedings of the IEEE, 1991, 79(7): 1054-1062.
- [7] 仲崇霞, 杨廷高. 脉冲星时间稳定度的估计方法 [J]. 时间频率学报, 2004, 27(1): 48-53.
- [8] 尹东山, 高玉平, 赵书红. 综合脉冲星时间尺度 [J]. 天文学报, 2016, 57(3): 326-335.
- [9] ZHANG Z, TONG M, YANG T. An improved Wiener filtration method for constructing the ensemble pulsar timescale [J]. The Astrophysical Journal, 2024, 962(1): 2.
- [10] RILEY W J, HOWE D A. Handbook of frequency stability analysis [M]. Boulder: US Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, 2008.
- [11] 董绍武. 现代守时技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2022.
- [12] 马岳鑫, 唐成盼, 胡小工. 原子钟频率稳定度评估方法综述 [J]. 天文学进展, 2023, 41(1): 134-144.
- [13] 漆贯荣. 时间科学基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [14] FRIEDERICH S T. Analysis of geodetic time series using Allan variances [J]. Stuttgart: Universität Stuttgart, 2010.
- [15] HOWE D A, ALLAN D U, BARNES J A. Properties of signal sources and measurement methods [C]// Thirty Fifth Annual Frequency Control Symposium, IEEE, 1981: 669-716.
- [16] GREENHALL C A, RILEY W J. Uncertainty of stability variances based on finite differences [R]. 2004.
- [17] ALLAN D W, BARNES J A. A modified Allan variance with increased oscillator characterization ability [C]// Proceedings of the 35th Annual Frequency Control Symposium, 1981, 5: 470-475.
- [18] EDWARDS R T, HOBBS G B, MANCHESTER R N. TEMPO2, a new pulsar timing package-II. The timing

- model and precision estimates[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2006, 372 (4): 1549-1574.
- [19] 童明雷,杨廷高,赵成仕,等.脉冲星计时模型参数的测量精度分析与估计[J].中国科学:物理学 力学 天文学,2017,47(9):103-112.
- [20] MATSAKIS D N, TAYLOR J H, EUBANKS T M. A statistic for describing pulsar and clock stabilities[J]. Astronomy and Astrophysics, 1997, 326: 924-928.
- [21] HOBBS G, GUO L, CABALLERO R N, et al. A pulsar-based time-scale from the International Pulsar Timing Array[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2020, 491(4): 5951-5965.
- [22] KEITH M J, COLES W, SHANNON R M, et al. Measurement and correction of variations in interstellar dispersion in high-precision pulsar timing [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2013, 429 (3): 2161-2174.
- [23] PERERA B B P, DECESAR M E, DEMOREST P B, et al. The international pulsar timing array: second data release[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2019, 490(4): 4666-4687.
- [24] HOBBS G B, EDWARDS R T, MANCHESTER R N. TEMPO2, a new pulsar timing package-I. An overview[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2006, 369(2): 655-672.